

Cours Mathématiques PC

DM1 – ANNÉE 2020-2021 – DATE LIMITE : 12/11/2020

Exercice 1. Soient

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x \mapsto x(2-x).$$

- (a) Étudier la fonction f et tracer son graphe. Est-elle dérivable en 0 ?
- (b) Tracer le graphe de la fonction g (On pourra étudier g rapidement en remarquant que g définit une parabole, ou bêtement faire un tableau de variations).
- (c) Montrer que les graphes de f et de g s'intersectent exactement en deux points. (Les tracer sur le même graphe pour visualiser simplement!)

Exercice 2. Soit $f: z \mapsto e^z$ ($z \in \mathbb{C}$).

- (a) Montrer que f est une bijection de la bande $B := \{|\operatorname{Im} z| < \pi\}$ sur le plan coupé $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, où $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.
- (b) Montrer que la bijection inverse $f^{-1}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow B$ s'identifie avec le logarithme népérien usuel sur \mathbb{R}_+^* .
- (c) Déterminer les limites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f^{-1}(re^{i(\pi-\varepsilon)}) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f^{-1}(re^{i(\pi+\varepsilon)}).$$

Interprétation graphique ?

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$(a) \quad z^2 = -8 + 6i \qquad (b) \quad z^2 = 5 - 12i$$

Exercice 4. Résoudre l'équation sur \mathbb{C} :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Indication : Utiliser la forme polaire).

Exercice 5. Résoudre l'équation sur \mathbb{C} :

$$z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 = 0.$$

Exercice 6. Résoudre l'équation sur \mathbb{C} :

$$iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0.$$