Équations différentielles

Manfred Madritsch

12 décembre 2022

Motivation

- Considérons une réaction chimique $A + B \to P$. À un instant $t \geq 0$ donné, nous notons la concentration d'un réactif R par $[R](t)$.

Motivation

- Considérons une réaction chimique $A + B \to P$. À un instant $t \geq 0$ donné, nous notons la concentration d'un réactif R par $[R](t)$.
- La vitesse de disparition (ou vitesse de consommation) instantanée de l'un des réactifs s'écrite $-\mathrm{d}[R]/\mathrm{d}t$.

Motivation

- Considérons une réaction chimique $A + B \to P$. À un instant $t \geq 0$ donné, nous notons la concentration d'un réactif R par $[R](t)$.
- La vitesse de disparition (ou vitesse de consommation) instantanée de l'un des réactifs s'écrite $-\mathrm{d}[R]/\mathrm{d}t$.
- Enfin soient $[A_0]$ et $[B_0]$ les concentrations à l'instant $t = 0$ de A et B, respectivement.

Motivation

- Considérons une réaction chimique $A + B \to P$. À un instant $t \geq 0$ donné, nous notons la concentration d'un réactif R par $[R](t)$.
- La vitesse de disparition (ou vitesse de consommation) instantanée de l'un des réactifs s'écrite $-\mathrm{d}[R]/\mathrm{d}t$.
- Enfin soient $[A_0]$ et $[B_0]$ les concentrations à l'instant $t = 0$ de A et B, respectivement.
- Supposons que l'ordre global est 2 et l'ordre par rapport à chacun des réactifs A et B est 1 :
$$\frac{\mathrm{d}[P]}{\mathrm{d}t} = k[A][B]$$
où k est la constante de vitesse de la réaction.

Outline

L'espace vectoriel

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *L'ensemble*

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \colon x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

est dit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Intervalles fermés et ouverts

Définition

1. *Soient* $-\infty < a_i < b_i < \infty$ *pour* $1 \leq i \leq n$. *Alors l'ensemble*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \colon a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

   est dit un intervalle fermé de $\mathbb{R}^n$.

2. *Soient* $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$ *pour* $1 \leq i \leq n$. *Alors l'ensemble*

$$]\mathbf{a}, \mathbf{b}[= \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \colon a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

   est dit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Fonctions à n variables

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *associe à tout* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *un seul nombre réel* $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Équations différentielles

Définition

Une équations différentielle *d'ordre n est une équation de la forme*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.

Équations différentielles

Définition

Une équations différentielle *d'ordre n est une équation de la forme*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.
Une fonction n fois derivable y est solution sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, si pour tout $x \in I$ on a

1. $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \mathcal{D}_F$ *et*
2. $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$

Équations différentielles

Définition

Une équations différentielle *d'ordre n est une équation de la forme*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.
Une fonction n fois derivable y est solution sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, si pour tout $x \in I$ on a

1. $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \mathcal{D}_F$ *et*
2. $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$

Définition

Soit (y, I) solution d'une équation differentielle d'ordre n, et soit $x_0 \in I$ et $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$ des nombres réels. Nous disons que la solution (y, I) résout le problème de Cauchy (satisfait les conditions initiales) si

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Outline

Équations différentielles à variables séparées

Définition

Un équation différentielle à variable séparées est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{ou} \quad y' = \frac{f(x)}{h(y)}.$$

Équations différentielles à variables séparées

Définition

Un équation différentielle à variable séparées est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = f(x)g(y) \quad ou \quad y' = \frac{f(x)}{h(y)}.$$

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur $]a,b[$ et $]c,d[$, respectivement, et soit $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in]c,d[$. Si $x_0 \in]a,b[$ et $y_0 \in]c,d[$, alors ils existent une voisinage $U(x_0) \subset]a,b[$ et une fonction $y = y(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

1. $y'(x) = f(x)g(y(x))$;
2. $y(x_0) = y_0$.
3. *On détermine la solution y en résolvant l'équation :*

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = F(x).$$

Exemple

Considérons l'équation différentielle

$$y' = \frac{y}{x}$$

pour $0 < x < +\infty$ et $0 < y < +\infty$. Nous cherchons une solution satisfant la condition initialle $y(1) = 2$.

Exemple

Considérons l'équation différentielle

$$y' = \frac{y}{x}$$

pour $0 < x < +\infty$ et $0 < y < +\infty$. Nous cherchons une solution satisfant la condition initialle $y(1) = 2$. Avec notre notation on a $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = y$, $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$.

Exemple

Considérons l'équation différentielle

$$y' = \frac{y}{x}$$

pour $0 < x < +\infty$ et $0 < y < +\infty$. Nous cherchons une solution satisfant la condition initialle $y(1) = 2$. Avec notre notation on a $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = y$, $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$. Donc on détermine la solution en résolvant l'équation :

$$\int_2^y \frac{1}{\eta} \mathrm{d}\eta = \int_1^x \frac{1}{\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Exemple

Considérons l'équation différentielle

$$y' = \frac{y}{x}$$

pour $0 < x < +\infty$ et $0 < y < +\infty$. Nous cherchons une solution satisfant la condition initialle $y(1) = 2$. Avec notre notation on a $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = y$, $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$. Donc on détermine la solution en résolvant l'équation :

$$\int_2^y \frac{1}{\eta} \mathrm{d}\eta = \int_1^x \frac{1}{\xi} \mathrm{d}\xi.$$

On obtient

$$\ln y - \ln 2 = \ln x \Leftrightarrow y(x) = 2x.$$

Exemple

Soit $x(t) = [P](t)$ la portion déjà produit. La stœchiométrie de la réaction indique que, lorsque la concentration de A est descendue à $[A_0] - x$, celle de B a aussi diminué et vaut $[B_0] - x$. D'où :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k([A_0] - x)([B_0] - x).$$

La condition initiale est $x(0) = 0$

Exemple

Soit $x(t) = [P](t)$ la portion déjà produit. La stœchiométrie de la réaction indique que, lorsque la concentration de A est descendue à $[A_0] - x$, celle de B a aussi diminué et vaut $[B_0] - x$. D'où :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k([A_0] - x)([B_0] - x).$$

La condition initiale est $x(0) = 0$ et donc

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{([A_0] - x)([B_0] - x)} = k \int_0^t \mathrm{d}t.$$

Exemple

Soit $x(t) = [P](t)$ la portion déjà produit. La stœchiométrie de la réaction indique que, lorsque la concentration de A est descendue à $[A_0] - x$, celle de B a aussi diminué et vaut $[B_0] - x$. D'où :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k([A_0] - x)([B_0] - x).$$

La condition initiale est $x(0) = 0$ et donc

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{([A_0] - x)([B_0] - x)} = k \int_0^t \mathrm{d}t.$$

Avec la décomposition en éléments simples

$$\frac{\mathrm{d}x}{([A_0] - x)([B_0] - x)} = \frac{1}{[B_0] - [A_0]} \left(\frac{1}{[A_0] - x} - \frac{1}{[B_0] - x} \right)$$

Exemple

Soit $x(t) = [P](t)$ la portion déjà produit. La stœchiométrie de la réaction indique que, lorsque la concentration de A est descendue à $[A_0] - x$, celle de B a aussi diminué et vaut $[B_0] - x$. D'où :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k([A_0] - x)([B_0] - x).$$

La condition initiale est $x(0) = 0$ et donc

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{([A_0] - x)([B_0] - x)} = k \int_0^t \mathrm{d}t.$$

Avec la décomposition en éléments simples

$$\frac{\mathrm{d}x}{([A_0] - x)([B_0] - x)} = \frac{1}{[B_0] - [A_0]} \left(\frac{1}{[A_0] - x} - \frac{1}{[B_0] - x} \right)$$

on obtient

$$\ln \left(\frac{[B]/[B_0]}{[A]/[A_0]} \right) = ([B_0] - [A_0])kt.$$

Motivation continue

- Proche de l'équilibre :

$$A \underset{k}{\longrightarrow} B \quad \text{et} \quad B \underset{k'}{\longrightarrow} A$$

Motivation continue

- Proche de l'équilibre :

$$A \underset{k}{\longrightarrow} B \quad \text{et} \quad B \underset{k'}{\longrightarrow} A$$

- La vitesse nette résultante de disparition de A :

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -k[A] + k'[B]$$

Motivation continue

- Proche de l'équilibre :

$$A \underset{k}{\longrightarrow} B \quad \text{et} \quad B \underset{k'}{\longrightarrow} A$$

- La vitesse nette résultante de disparition de A :

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -k[A] + k'[B]$$

- Comme $[A] + [B] = [A_0]$ on obtient

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -k[A] + k'([A_0] - [A]) = -(k + k')[A] + k'[A_0]$$

Outline

Équations différentielles linéaires d'ordre n

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ des fonctions définies sur I. Alors

- *une équation différentielle d'ordre n est* linéaire *si elle est de la forme*

$$L[y] = a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = f(x);$$

- *une équation différentielle linéaire est* homogène, *ou* sans second membre, *si la fonction f ci-dessus est la fonction nulle ;*
- *une équation différentielle linéaire est à* coefficients constants *si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes.*

Exemple

1. $y' + 5xy = e^x$

Exemple

1. $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre ;
2. $y' + 5xy = 0$

Exemple

1. $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre ;
2. $y' + 5xy = 0$ est l'éqaution différentielle homogène associée à la précédente ;
3. $2y'' - 3y' + 5y = 0$

Exemple

1. $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre ;
2. $y' + 5xy = 0$ est l'éqaution différentielle homogène associée à la précédente ;
3. $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation differentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre (homogène) ;
4. $y'^2 - y = x$ ou $y'' \cdot y' - y = 0$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.

Principes de linéarité et de superposition

Théorème (Principe de linéarité)

Si y_1 *et* y_2 *sont solutions de l'équation différentielle linéaire* $L[y] = 0$*, alors, quels que soient* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*,* $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ *est aussi solution de cette équation* $L[y] = 0$*.*

Principes de linéarité et de superposition

Théorème (Principe de linéarité)

Si y_1 *et* y_2 *sont solutions de l'équation différentielle linéaire* $L[y] = 0$*, alors, quels que soient* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*,* $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ *est aussi solution de cette équation* $L[y] = 0$*.*

Théorème (Principe de superposition)

La solution générale y *de* $L[y] = f(x)$ *est de la forme*

$$y(x) = y_1(x) + y_0(x),$$

où y_0 *est solution de l'équation homogène associée* $L[y] = 0$ *et* y_1 *est une solution particulière de l'équation inhomogène* $L[y] = f(x)$*.*

Outline

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Théorème

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient a et f deux fonctions continues sur I, et soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution y de l'équation

$$y' + a(x)y(x) = f(x) \tag{E}$$

avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Exemple

Résoudre l'équation $y' + y = e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre l'équation $y' + y = e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$y(x) = \frac{e^x}{2} + 1 + Ce^{-x}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre l'équation $y' + y = e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$y(x) = \frac{e^x}{2} + 1 + Ce^{-x}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre l'équation

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -(k + k')[A] + k'[A_0]$$

pour $t \geq 0$ avec $[A](0) = [A_0]$.

Exemple

Résoudre l'équation $y' + y = e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$y(x) = \frac{e^x}{2} + 1 + Ce^{-x}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre l'équation

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -(k + k')[A] + k'[A_0]$$

pour $t \geq 0$ avec $[A](0) = [A_0]$.
Solution : Pour $t \geq 0$ on a

$$[A](t) = [A_0]\frac{k' + ke^{-(k+k')t}}{k + k'}$$

Outline

Définition

Soit I un intervalle ouvert et soit f une fonction continue sur I. Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants est une équation de la forme

$$L[y] = ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E_0}$$

est appelée l'équation homogène associée à (E).

Équation homogène

Comme d'habitude nous cherchons une solution de (E_0) sous l'ansatz $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. En remplaçant dans (E_0) on trouve

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Longleftrightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ &\Longleftrightarrow ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Définition

*L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée l'*équation caractéristique *associée à (E_0).*

Théorème

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0).

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les*

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine réelle double r_0 et les solutions de (E_0) sont les*

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x} \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjugués $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E_0) sont les*

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) \right) \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Équation avec second membre – méthode d'ansatz

Nous revenons à la forme générale avec second membre :

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

- **Second membre du type $e^{\alpha x}P(x)$.** Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme à coefficients réels, alors on cherche une solution particulière sous la forme :

  $$y_1(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x),$$

  où Q est une polynôme de même degré que P et m est la multiplicité de la racine α de l'équation caractéristique (où $m = 0$ si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique).

Équation avec second membre – méthode d'ansatz

Nous revenons à la forme générale avec second membre :

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

- **Second membre du type $e^{\alpha x}P(x)$.** Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme à coefficients réels, alors on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_1(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x),$$

  où Q est une polynôme de même degré que P et m est la multiplicité de la racine α de l'équation caractéristique (où $m = 0$ si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique).
- **Second membre du type $e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$.** Si $g(x) = e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et P_1, P_2 deux polynômes à coefficients réels, alors on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_1(x) = x^m e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right),$$

  où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$ et $m = 1$ si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique et $m = 0$ sinon.

Exemple

Résoudre les équations différentielles :

$$\begin{aligned}(E_0)\, y'' - 5y' + 6y &= 0\\ (E_1)\, y'' - 5y' + 6y &= 4xe^{x}\\ (E_2)\, y'' - 5y' + 6y &= 4xe^{2x}.\end{aligned}$$

De plus, trouver la solution de (E_1) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3						

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3			

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}						

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1			

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1	1	A	xAe^{2x}
xe^{3x}						

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1	1	A	xAe^{2x}
xe^{3x}	3	0	x			

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1	1	A	xAe^{2x}
xe^{3x}	3	0	x	1	$Ax+B$	$x(Ax+B)e^{3x}$
$\sin(x)$						

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1	1	A	xAe^{2x}
xe^{3x}	3	0	x	1	$Ax+B$	$x(Ax+B)e^{3x}$
$\sin(x)$	0	1	1			

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1	1	A	xAe^{2x}
xe^{3x}	3	0	x	1	$Ax + B$	$x(Ax + B)e^{3x}$
$\sin(x)$	0	1	1	0	A	$A\cos(x) + B\sin(x)$
$x\cos(3x)$						

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1	1	A	xAe^{2x}
xe^{3x}	3	0	x	1	$Ax+B$	$x(Ax+B)e^{3x}$
$\sin(x)$	0	1	1	0	A	$A\cos(x)+B\sin(x)$
$x\cos(3x)$	0	3	x			

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1	1	A	xAe^{2x}
xe^{3x}	3	0	x	1	$Ax + B$	$x(Ax + B)e^{3x}$
$\sin(x)$	0	1	1	0	A	$A\cos(x) + B\sin(x)$
$x\cos(3x)$	0	3	x	0	$Ax + B$	$(Ax + B)\cos(3x) + (Cx + D)\sin(3x)$
$e^{2x}\cos(x)$						

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1	1	A	xAe^{2x}
xe^{3x}	3	0	x	1	$Ax+B$	$x(Ax+B)e^{3x}$
$\sin(x)$	0	1	1	0	A	$A\cos(x)+B\sin(x)$
$x\cos(3x)$	0	3	x	0	$Ax+B$	$(Ax+B)\cos(3x)+(Cx+D)\sin(3x)$
$e^{2x}\cos(x)$	2	1	1			

Exemple

Soit

$$y'' - 5y' + 6y = f(x)$$

donnée.

$f(x)$	α	β	$P(x)$	m	$Q(x)$	$y_1(x)$
3	0	0	3	0	A	A
e^{2x}	2	0	1	1	A	xAe^{2x}
xe^{3x}	3	0	x	1	$Ax+B$	$x(Ax+B)e^{3x}$
$\sin(x)$	0	1	1	0	A	$A\cos(x)+B\sin(x)$
$x\cos(3x)$	0	3	x	0	$Ax+B$	$(Ax+B)\cos(3x)+(Cx+D)\sin(3x)$
$e^{2x}\cos(x)$	2	1	1	0	A	$e^{2x}(A\cos(x)+B\sin(x))$