Manfred Madritsch

Siebmethoden und das Goldbachsche Problem

Endliche additive Basen und die Šnirelman Zahl

Diplomarbeit*

Technische Mathematik

Studienzweig Informationsverarbeitung

Verfasst am
Institut für Mathematik A
Technische Universität Graz
unter Anleitung von

O.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy

Manfred Madritsch

Graz, August 2005

*Diese Arbeit wurde unterstützt vom FWF-Projekt S-8307-MAT.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfasst, andere als angegebene Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient zu haben.

Manfred Madritsch

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Primzahlen haben die Mathematiker seit jeher fasziniert. In einem algebraischen Zahlkörper sucht man nach Primidealen um eine Gleichung zu lösen. In der Logik spielen sie eine zentrale Rolle im Beweis des Satzes von Gödel, der besagt, dass kein endliches Axiomensystem vollständig ist. Ich möchte mich aber mit einer etwas ungewöhnlichen Frage der Primzahlen befassen, denn ich bin primär an ihren additiven Eigenschaften interessiert. Es stellt sich nämlich die Frage, ob man jede natürliche Zahl als Summe von Primzahlen darstellen kann. Diese konnte Šnirelman als Erster beantworten:

Es gibt eine Zahl C, sodass jede natürliche Zahl N als Summe von maximal C Primzahlen darstellbar ist.

Dieser Satz stammt aus der additiven Zahlentheorie, genauer gesagt, aus dem Bereich der sich mit Zahlenbasen und Dichten beschäftigt und wird im 3. Kapitel bewiesen.
Šnirelman wollte eigentlich die Goldbachsche Vermutung beweisen. Nachdem Euler bewiesen hat, dass alle natürlichen Zahlen bis auf die $\equiv 7 \bmod 8$ als Summe von 3 Quadraten darstellbar sind, stellte Goldbach in einem Brief an Euler die Frage, ob dies auch mit Primzahlen anstelle von Quadraten möglich wäre.

Ist jede natürliche Zahl N als Summe dreier Primzahlen darstellbar?

Dieses ternäre Goldbachproblem galt lange Zeit als unlösbar. Man konnte sich nicht einmal vorstellen, wie man den Satz von Šnirelman beweisen könnte. Trotzdem war von Anfang an klar, dass das Problem trivial wäre, wenn man folgendes beweisen könnte.

Ist jede gerade natürliche Zahl $N > 2$ als Summe zweier Primzahlen darstellbar?

Šnirelman brauchte für seinen Beweis Siebmethoden (Kapitel 1) und die Theorie über additive Basen (Kapitel 3), die er eigens für dieses Problem entwickelte. Die Siebmethode stammt ursprünglich von Eratostanes und wurde dann vergeblich von Lagrange zum Primzahlbeweis herangezogen. Viggo Brun war es schließlich der eine neue Siebmethode entwickelte und damit die Primzahlzwillinge beweisen wollte. Leider war er nur in der Lage zu zeigen, dass wenn es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, dann sind es immer noch sehr wenige. Er zeigte nämlich, dass die Reihe

$$\sum_{p,p+2 \text{ prim}} \frac{1}{p}$$

konvergiert (oder sogar endlich ist). Der Greznwert heißt Brun'sche Konstante und beträgt ungefähr $1.9021605823 \pm 8 \cdot 10^{-10}$. Deswegen und vielleicht auch wegen der Komplexität dieser kombinatorischen Siebmethode, wurde sie lange Zeit unterschätzt. Man wollte nicht so recht glauben, dass damit das Goldbachsche Problem lösbar wäre. Erst als Selberg sein Sieb präsentierte wurde offenbar, was mit den Siebmethoden möglich ist. Wir werden es im 1. Kapitel kennen lernen.
Mitten in dieses Interesse um die Siebmethoden kam Vinogradovs Beweis des ternären Goldbachproblems für genügend große Zahlen. Hierzu verwendete er die Kreismethode, die bereits von Hardy und Littlewood auf das Waring'sche Problem angewendet wurde.

Ist jede genügend große natürliche Zahl N als Summe von C k-ten Potenzen darstellbar?

Einerseits waren diese Beweise von Hardy-Littlewood und Vinogradov ein großer Durchbruch, andererseits war das "genügend groß" so groß ($N \geq 3^{3^{15}} \approx 3.15 \cdot 10^{6846168}$), dass immer noch für sehr viele Zahlen N, das Problem nicht gelöst werden konnte. Außerdem konnte man mit der Kreismethode nur ein asymptotisches Verhalten feststellen, welches im Fall des binären Goldbachproblems außer Reichweite stand.
Ernüchtert verfeinerte man immer weiter die Siebmethoden und schuf zuerst das Lineare Sieb und später das Sieb von Rosser. Parallel dazu wurde das große Sieb von Linnik weiterentwickelt (Kapitel 1). Damit war man in der Lage, eine sehr gute Abschätzung der Primzahlverteilung zu geben (Satz von Bombieri-Vinogradov, welchen wir in Kapitel 2 beweisen werden), womit wieder weitere Verbesserungen rund um das binäre und ternäre Goldbachproblem möglich wurden.
Chen war es schließlich der in seinem Beweis das Lineare Sieb verwendete um mit einem verblüffenden Trick zu zeigen, dass:

Jede genügend große gerade Zahl N ist als Summe einer Primzahl und eines Produkts von maximal 2 Primzahlen darstellbar.

Dieser Beweis zeigte zum ersten Mal die Mächtigkeit der Siebmethode. Dennoch ist auch hier "genügend groß" im Bereich von $N \geq e^{e^{11503}} \approx 3.33 \cdot 10^{43000}$
Heute ist es mit Hilfe der computergestützten Mathematik möglich, größere und umfangreichere Berechnungen schnell und einfach durchzuführen. Damit konnte man die Šnirelman Konstante (die Anzahl der Primzahlen, die man zur Darstellung einer natürlichen Zahl benötigt) immer weiter herabzusenken.
Schließlich gelang es Ramare im Jahre 1995 folgenden Satz zu beweisen, den wir in Kapitel 4 sehen werden:

Jede gerade natürliche Zahl ist als Summe von maximal 6 Primzahlen darstellbar.

Dabei verwendete er die Siebmethode gepaart mit der genauen Berechnung von Primzahlverteilungen in Restklassen. Damit wurde eine Brücke zwischen der Siebmethode und dem Satz von Mann-Dyson geschlagen, die später noch ausführlich erklärt werden.
An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zur Entstehung dieser Diplomarbeit beigetragen haben, vor allem O.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy, der bei mir das Interesse zu diesem Thema geweckt hat, und der Unterstützung durch das FWF-Forschungsprojekt S-8307-MAT.
All denen, die mich während Schule und Studium der Mathematik näher gebracht haben und mein Interesse so gut es ging zu stillen wußten, gilt mein besonderer Dank.

Graz, im August 2005

Manfred Madritsch

Kapitel 1

Siebmethoden

Siebmethoden sind vom Prinzip her schon sehr alt. Das erste Sieb geht auf Eratosthenes zurück. Dabei ist man sich bis heute nicht ganz einig, ob es zum Auffinden von Primzahlen oder zur Faktorisierung verwendet wurde. Sicher ist, dass es aus dem dritten Jahrhundert vor Christus stammt und wie folgt funktioniert: Man schreibt alle Zahlen von 2 bis zu einer Zahl N auf. Dann beginnt man damit, dass 2 eine Primzahl ist und streicht jede 2-te Zahl weg. Die kleinste Zahl die übrig bleibt ist 3. Also ist 3 eine Primzahl. Man streicht nun alle durch 3 teilbaren Zahlen. Die nächste kleinste Zahl ist 5 usw.. Dabei wurden Zahlen mehrfach durchgestrichen, was darauf schließen lässt, dass diese mehrere Primfaktoren haben.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7
~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~
~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~
~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~

1.1 Das Sieb von Eratosthenes-Legendre

Als einer der ersten war Legendre von der Idee des Siebes angetan und versuchte damit den Primzahlsatz zu beweisen. Dies sollte nicht funktionieren, da wie wir oben sehen zuviele Zahlen mehrfach durchgestrichen (herausgesiebt) wurden. Dadurch konnte er keine genügend große untere Schranke finden. Dennoch gab er Anstoß zu der Idee des Siebes, deswegen möchten wir hier seine Ideen anführen und damit Schritt für Schritt die allgemeinen Notationen geben. Zuerst definieren wir das Objekt, das uns eigentlich interessiert, die zu siebende Menge $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$$

und die Primzahlen, die sieben:

$$P = P(z) = \prod_{p<z} p$$

wobei p immer für eine Primzahl steht. Für das Sieb von Eratosthenes-Legendre ist $\mathcal{N} = [\![1, X]\!]$.
Die Siebfunktion zählt nun die Elemente der Menge $\mathcal{A}$, die nicht von Primzahlen aus P geteilt werden.

$$S(\mathcal{A}, P) = \#\{a \in \mathcal{A} \mid (a, P) = 1\}$$

Dabei steht (a, b) für den größten gemeinsamen Teiler von a und b. Wir können nun $S(\mathcal{N}, P)$ von unten abschätzen, da wir wissen, dass alle Primzahlen kleiner z, herausgesiebt werden:

$$S(\mathcal{N}, P) = \pi(X) - \pi(z) + 1$$

Um nun die Siebfunktion nach oben abschätzen zu können verwenden wir die Möbiusfunktion, die im Anhang näher erklärt wird. Hierzu schreiben wir S wie folgt:

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{N}, P) = &\sum_{\substack{n<X \\ (n,P)=1}} 1 = \\
&= \sum_{n<X} \sum_{d|(n,P)} \mu(d) = \\
&= \sum_{d|P} \mu(d) \sum_{1 \leq m < X/d} 1 = \\
&= [X] - \sum_{p_1<z} \left[\frac{X}{p_1}\right] + \sum_{p_2<p_1<z} \left[\frac{X}{p_1 p_2}\right] - \sum_{p_3<p_2<p_1<z} \left[\frac{X}{p_1 p_2 p_3}\right] \dots
\end{aligned}$$

Nun ist klarerweise

$$[X] = X - \{X\} = X + \mathcal{O}(1)$$

womit wir weiters schreiben können

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{N}, P) = X \sum_{d|P} \frac{\mu(d)}{d} + \mathcal{O}\left(\sum_{d|P} 1\right) &= \\
= X \prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \mathcal{O}(2^{\pi(z)}) &< \\
< \frac{X}{\log z} + \mathcal{O}(2^{\pi(z)})&
\end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der letzten Umformung verwendet, dass

$$\prod_{p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\prod_{p<z}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{p^r}>\sum_{n<z}\frac{1}{z}>\log z.$$

Wir können nun nur $z=\log X$ wählen, da sonst der $\mathcal{O}$-Term größer als der Hauptterm wird. Damit erhalten wir

$$\pi(X)=\mathcal{O}\left(\frac{X}{\log\log X}\right).$$

In dieser Abschätzung zeigt sich die ganze Schwäche des $\mathcal{O}$-Terms. Denn der Primzahlsatz sagt uns

$$\pi(X)\sim\frac{X}{\log X}$$

Trotzdem wird die Idee des Siebes recht gut gezeigt. Wie oben erwähnt scheitert die Siebmethode am Primzahlsatz, weil zuviele Zahlen mehrfach von “kleinen” Primzahlen gesiebt werden.

1.2 Anwendungen der Siebmethode

1.2.1 Notation

Zuerst wollen wir unsere Notation ein wenig verbessern, sodass es uns leichter fällt, nur das Wesentliche im Auge zu behalten.

Definition 1.2.1. Wir schreiben $S(A)=\sum_{d|A}\mu(d)$ und kürzen $S((a,P))$ mit $S(a,P)$ ab, dann ist

$$S(a,P)=\sum_{d|(a,P)}\mu(d)=\begin{cases}1 & \text{falls } (a,P)=1,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Definition 1.2.2. Wir schreiben

$$\mathcal{A}_d=\{a\in\mathcal{A}\,|\,a\equiv 0 \bmod d\}.$$

Definition 1.2.3. Mit $S(a,P)$ wie oben können wir schreiben

$$S(\mathcal{A},P)=\sum_{a\in\mathcal{A}}S(a,P).$$

Mit diesen Definitionen können wir nun die Siebformel umformen und erhalten die Identität von Legendre

$$S(\mathcal{A},P)=\sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{\substack{d|a\\ d|P}}\mu(d)=\sum_{d|P}\mu(d)\,|\mathcal{A}_d| \tag{1.1}$$

Hierbei wird bereits die spätere Idee des Linearen Siebes klar. Man entwickelt die Identität entlang der ds und erhält somit eine bessere Abschätzung.

1.2.2 Die Primzahlen im Intervall $(Y - X, Y]$

Dabei sind wir an einer Abschätzung für $\pi(Y) - \pi(Y - X)$ interesiert, die nur von X abhängt. Da Titchmarch der erste war, der das Sieb von Brun auf diese Fragestellung anwendete, wurde sie nach ihm Ungleichung von Brun-Titchmarch genannt und soll später noch bewiesen werden. Hier wollen wir den Grundstein für die Betrachtung legen und setzten $\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{N} : Y - X < b \leq Y\}$ mit $Y \geq X > 0$, P wie oben. Im vorigen Abschnitt betrachteten wir den Fall $Y = X$ und für diesen allgemeinen Fall rechnen wir ähnlich

$$|\mathcal{B}_d| = \left[\frac{Y}{d}\right] - \left[\frac{Y - X}{d}\right] = \frac{X}{d} + \mathcal{O}(1).$$

Nun verwenden wir die Identität von Legendre (1.1) und erhalten

$$S(\mathcal{B}, P) \leq \frac{X}{\log z} + \mathcal{O}(2^{\pi(z)}).$$

Das kennen bwir aber bereits, wodurch sich für $z = \log X$ ergibt, dass

$$\pi(Y) - \pi(Y - X) = \mathcal{O}\left(\frac{X}{\log\log X}\right)$$

Später werden wir mit Hilfe des Siebes von Selberg in der Lage sein, eine bessere Abschätzung zu geben.

1.2.3 Primzahlen als Funktionswerte von Polynomen

Die Überschrift lässt bereits ahnen, dass wir

$$\mathcal{B} = \{f(n) : Y - X < n \leq Y\}$$

betrachten. Dabei ist $f(n)$ ein Polynom. Die Primzahlzwillinge ($f(n) = n(n + 2)$) und das Goldbachsche Problem ($f(n) = n(N - n)$) sind ganz eng mit dieser Anwendung verbunden. P ist wiederum das Produkt aller Primzahlen $p < z$.
Um $|\mathcal{B}_d|$ abzuschätzen, betrachten wir jede Restklasse getrennt. Dann sehen wir, dass

$$|\mathcal{B}_d| = \sum_{\substack{1 \leq l \leq d \\ f(l) \equiv 0 \bmod d}} \sum_{\substack{Y - X < n \leq X \\ n \equiv l \bmod d}} 1 = \sum_{\substack{1 \leq l \leq d \\ f(l) \equiv 0 \bmod d}} \left(\frac{X}{d} + \mathcal{O}(1)\right).$$

Dabei haben wir die Eigenschaften aus dem vorigen Abschnitt verwendet. Sein nun $\rho(d)$ die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $f(l) \equiv 0 \bmod d$. Dann können wir schreiben

$$|\mathcal{B}_d| = X\frac{\rho(d)}{d} + \mathcal{O}(\rho(d))$$

und mit der Identität von Legendre (1.1) erhalten wir

$$S(\mathcal{B}, P) = X \prod_{p < z} \left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right) + \mathcal{O}\left(\sum_{d | P} \rho(d)\right).$$

1.2.4 Polynome mit Primzahlargument

Wir interessieren uns nun für

$$\mathcal{B} = \{f(p) : 1 \leq p \leq x\},$$

wobei p eine Primzahl ist. Diese Anwendung zielt auch auf Primzahlzwillinge ($f(p) = p+2$) und das Problem von Goldbach ab ($f(p) = N - p$). Hier gehen wir genau so vor, wie zuvor und erhalten

$$|\mathcal{B}_d| = \sum_{\substack{1 \leq l \leq d \\ f(l) \equiv 0 \bmod d}} \sum_{\substack{1 \leq p \leq x \\ p \equiv l \bmod d}} 1.$$

Die innere Summe werden wir dann später mit dem Satz von Bombieri-Vinogradov abschätzen können. Hierzu seien

$$E(x; l, d) = \max_{y \leq x} \max_{(a,d)=1} \left| \pi(y; a, d) - \frac{y}{\phi(d) \log y} \right| \quad \text{und}$$
$$\operatorname{li} x = \int_2^\infty \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}.$$

Damit können wir die innere Summe abschätzen und erhalten

$$\sum_{\substack{1 \leq p \leq x \\ p \equiv l \bmod d}} 1 = \frac{\operatorname{li} x}{\phi(d)} + E(x; l, d) \text{ für } (l, d) = 1.$$

Wir setzen nun wie oben $\psi(d)$ die Anzahl der Lösungen für

$$f(l) \equiv 0 \bmod d, \quad (l, d) = 1, \quad 1 \leq l \leq d$$

Wir sind nun in der Lage, $|\mathcal{B}_d|$ wie folgt zu schreiben

$$|\mathcal{B}_d| = \operatorname{li} x \frac{\rho(d)}{d} + r_{\mathcal{B}}(d),$$

mit

$$\rho(d) = \frac{d\psi(d)}{\phi(d)} \text{ und}$$
$$|r_{\mathcal{B}}(d)| \leq \left| \sum_{1 \leq l \leq d} E(x; l, d) \right| + \nu(d).$$

Dabei haben wir den Korrekturwert $\nu(d)$ eingeführt um die Fälle abzuhandeln in denen $(l, d) > 1$. Denn dann steuert die Summe 1 bei. Damit ergibt sich $\nu(d) \leq \log d / \log 2$. Diese Anwendungen sind die in der Literatur am häufigsten Behandelten. Dabei wird oft auf die hier getroffenen Definitionen für die Funktion ρ verwiesen. Als mögliche Vertiefung empfehlen sich die Bücher von Haberstam und Richert [9] und Greaves [8], die auch Grundlage dieses Abschnitts waren.

1.3 Allgemeine Siebmethoden

Nachdem wir in diesem Kapitel mehrere Siebe kennen lernen werden, möchte ich eine zentrale Notation einführen, sodass es einfach ist, die erreichten oberen und unteren Abschätzungen zu vergleichen. Außerdem ist es für den Leser dann einfacher, die hier abgedruckten Resultate in der vorhandenen Literatur wiederzuerkennen.

1.3.1 Die allgemeine Siebungleichung

Zuerst wollen wir eine Siebungleichung aufstellen, die wir dann im ganzen Kapitel verwenden wollen. Damit ist es leichter, die Ergebnisse zu vergleichen. Dazu folgende Definition

Definition 1.3.1. Wenn wir nun $\mathcal{A}_d$, X und $\rho(d)$ gesetzt haben, dann sei der "Rest" $r_{\mathcal{A}}(d)$ definiert durch

$$|\mathcal{A}_d| = X\frac{\rho(d)}{d} + r_{\mathcal{A}}(d) \text{ für } d \mid P \text{ und } d \leq D. \tag{1.2}$$

Dabei wird D der Siebbereich genannt. Damit ist es, wie mit z möglich die Parameter optimal zu wählen und somit an der Abschätzung zu schrauben. Dabei ist es natürlich wichtig, dass $r_{\mathcal{A}}$ im Vergleich zu X und $\rho(d)$ klein ist.
Um nicht die sehr scharfe Möbiusfunktion zu verwenden, bedienen wir uns zweier Funktionen λ_D^+ und λ_D^-, mit der folgenden Eigenschaft

$$\sum_{d|A} \lambda_D^-(d) \leq \sum_{d|A} \mu(d) \leq \sum_{d|A} \lambda_D^+(d) \text{ falls } A \mid P. \tag{1.3}$$

Dabei ist die zentrale Idee, λ_D^+ und λ_D^- so zu wählen, dass wir eine sehr gute obere und untere Abschätzung gewinnen für große P. Hier spielt wieder der Siebbereich eine Rolle, denn er stellt sicher, dass

$$\lambda_D^{\pm}(d) \neq 0 \Rightarrow d \leq D. \tag{1.4}$$

Definition 1.3.2. Wenn die beiden Eigenschaften (1.3) und (1.4) für λ_D^+ und λ_D^- erfüllt sind, dann nennen wir λ_D^+ und λ_D^- eine obere bzw untere Siebfunktion mit Siebbereich D für P.

Wir haben nun die wichtigen Eigenschaften zusammengetragen um die allgemeine Siebungleichung aufzustellen.

Satz 1.1. *Sei $\mathcal{A}$ wie in (1.2) und $\lambda^{\pm}$ erfülle (1.3) und (1.4), dann ist*

$$XV^-(D,P) + R^-(D,P) \leq S(\mathcal{A},P) \leq XV^+(D,P) + R^+(D,P),$$

wobei

$$V^{\pm}(D,P) = \sum_{d|P} \frac{\lambda_D^{\pm}(d)\rho(d)}{d} \text{ und}$$

$$R^{\pm}(D,P) = \sum_{d|P} \lambda_D^{\pm}(d) r_{\mathcal{A}}(d).$$

Dieser Satz ist nur dann interessant, wenn wir bereits alle Parameter gewählt haben. Als eine Hilfe für die Wahl, kann der Unterabschnitt über die Anwendungen gesehen werden, dieser gibt uns eine erste Vorstellung für die Wahl der Funktionen $\lambda_D^\pm$ und $\rho(d)$. Dabei sollten wir uns immer vor Augen halten, dass wir D und z so wählen, dass $R^\pm$ wesentlich kleiner als $XV^\pm$ ist. Nur dann ist es uns möglich, gute Abschätzungen zu erreichen.
In den meisten Fällen (also in allen, für die wir uns interessieren) ist

$$\lambda_D^\pm(1) = 1$$

und damit ist auch auf Grund der Multiplikativität

$$\left|\lambda_D^\pm(d)\right| \leq 1 \quad \forall d.$$

Dadurch ergibt sich für den "Rest" eine ziemlich einfache Betrachtung, denn

$$\left|\sum_{d|P} \lambda_D^\pm(d) r_{\mathcal{A}}\right| \leq \sum_{d|P} |r_{\mathcal{A}}|$$

Damit folgt ein Korollar, das auch den Beinamen "triviale Betrachtung des Restgliedes" trägt:

Korollar 1.1.1.

$$XV^-(D,P) - \sum_{\substack{d|P\\ d\leq D}} |r_{\mathcal{A}}| \leq S(\mathcal{A},P) \leq XV^+(D,P) + \sum_{\substack{d|P\\ d\leq D}} |r_{\mathcal{A}}|$$

Nachdem wir uns nur auf die d mit $d \mid P$ konzentrieren, ist es kein Nachteil, wenn wir die folgenden zwei Hypothesen annehmen. Außerdem ist unser Siebbereich mit D beschränkt. Wir setzen voraus, dass

$$0 \leq \rho(p) < p \quad \forall p \mid P.$$

und

$$\rho(p) = 0 \quad \forall p \nmid P.$$

Wir wollen nun eine Funktion V definieren, die als Vorstufe für $V^\pm$ dient. Damit können wir Abschätzungen für $XV^\pm$ gleichermaßen treffen und erreichen, dass die Terme die Siebfunktion besser einschließen. Hierzu die

Definition 1.3.3. Sei $V(P)$ definiert durch

$$V(P) = \sum_{d|P} \frac{\mu(d)\rho(d)}{d} = \prod_{p|P} \left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right).$$

Man kann $r_{\mathcal{A}}(d)$ nicht individuell abschätzen, aber es zeigt sich oft, dass

$$|r_{\mathcal{A}}(d)| \leq \rho(d)$$

eine gute Voraussetzung ist. Damit können wir das Restglied weiter abschätzen zu

$$\sum_{\substack{d|P \\ d\leq D}} |r_{\mathcal{A}}(d)| \leq D \sum_{\substack{d|P \\ d\leq D}} \frac{\rho(d)}{d} \leq D \prod_{p|P} \left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1} = \frac{D}{V(P)}$$

Diese Abschätzung wird vorallem interessant in Verbindung mit dem Selberg'schen Sieb.

1.3.2 Die Siebdichte oder -dimension

Die oben erwähnte Funktion ρ spielt, wie wir bereits gesehen haben, eine zentrale Rolle im Siebprozess. Vor allem ihr Auftreten im Produkt $V(P(z))$ legt uns nahe, dass wir uns näher damit beschäftigen. Dazu bemerken wir, dass in vielen Fällen die folgende Formel gilt:

$$\sum_{p<z} \frac{\rho(p)\log p}{p} = \kappa \log z + \mathcal{O}(1).$$

Dies gibt Anstoß zu folgender Definition

Definition 1.3.4. Wie nennen κ die Siebdichte oder -dimension der Funktion ρ, wenn es eine Konstante $L > 1$ gibt, sodass

$$\frac{V(P(w))}{V(P(z))} = \prod_{p|P(z)/P(w)} \left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1} \leq K_w \left(\frac{\log z}{\log w}\right)^{\kappa} \text{ für } 2 \leq w < z,$$

mit

$$K_w \leq 1 + \frac{L}{\log w}$$

Dabei ist es auch manchmal üblich einfach nur eine Konstante $K > 1$ mit $K_w \leq K$ für $w \geq 2$ zu haben. Dadurch vereinfacht sich die obere Ungleichung ungemein.
Andererseits folgt umittelbar aus der Definition, dass für $w = p$ und $z = p + \varepsilon$ gilt

$$\left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1} \leq K_p,$$

und sich daraus die Beschränktheit von $\rho(p)$ aus $\rho(p) \leq p(1 - 1/K_p)$ ergibt. Dies ist offensichtlich stärker als nur $\rho(p) < p$.
Die Definition gibt uns aber nur eine Abschätzung nach oben, deswegen zwingt sich folgende Definition auf.

Definition 1.3.5. Wir sagen κ ist eine doppelseitige Siebdichte oder -dimension der Funtkon ρ, wenn es zu $L > 1$ eine Konstante $L' \geq L$ gibt, sodass

$$\frac{V(P(w))}{V(P(z))} \geq \left(1 - \frac{L'}{\log w}\right)\left(\frac{\log z}{\log w}\right)^{\kappa} \text{ für } 2 \leq w < z.$$

1.3.3 Komposition von Sieben

In diesem letzen Abschnitt der allgemeinen Siebtheorie möchte ich zeigen, wie man aus zwei Sieben mit unterschiedlichen Siebbereichen D_1 und D_2, ein Sieb mit $D = D_1 D_2$ konstruiert. Hierzu seinen P_1 und P_2 die beiden Primzahlprodukte und $\lambda^{\pm}_{D_i}$ die Siebfunktionen mit Siebbereich D_i. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $(P_1, P_2) = 1$. Dann können wir jede Zahl $d = d_1 d_2$ im Siebbereich D in zwei teilerfremde Teile teilen, sodass $d_i \mid P_i$. Die Vorgehensweise um zwei Siebe nun zu vereinigen ist folgende

Satz 1.2. *Sei $\lambda^{\pm}_{D_i}$ eine Siebfunktion mit Siebbereich D_i und sei $D = D_1 D_2$. Dann definieren wir*

$$\lambda^+_D(d) = \lambda^+_{D_1}(d_1)\lambda^+_{D_2}(d_2), \tag{1.5}$$

$$\lambda^-_D(d) = \lambda^-_{D_1}(d_1)\lambda^+_{D_2}(d_2) + \lambda^+_{D_1}(d_1)\lambda^-_{D_2}(d_2) - \lambda^+_{D_1}(d_1)\lambda^+_{D_2}(d_2). \tag{1.6}$$

Wenn $\lambda^{\pm}_{D_i}$ Siebfunktionen für die Produkte P_i im Sinne von (1.2) sind, dann sind λ^+_D und λ^-_D obere bzw. untere Siebfunktionen mit Siebbereich D für das Produkt $P_1 P_2$ und erfüllen (1.2) und (1.3).
Darüberhinaus erfüllen λ^+_D und λ^-_D (1.4) mit folgenden $V^{\pm}$

$$\begin{aligned} &V^+(D,P) = V^+(D_1,P_1)V^+(D_2,P_2) \\ &V^-(D,P) = V^-(D_1,P_1)V^+(D_2,P_2) + V^+(D_1,P_1)V^-(D_2,P_2) - V^+(D_1,P_1)V^+(D_2,P_2) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Beweis. Der Siebbereich von $\lambda^{\pm}_D$ ist offensichtlich D, denn $d = d_1 d_2 \le D$ für $d_i \le D_i$. Wir schreiben abkürzend:

$$\Lambda^{\pm}_i = \sum_{d_1 | (A, P_i} \lambda^{\pm}_{D_i}(d_i), \quad \Lambda^{\pm} = \sum_{d | (A, P_1 P_2)} \lambda^{\pm}_D(d).$$

Dann gilt für $d = d_1 d_2$

$$\Lambda^+ = \Lambda^+_1 \Lambda^+_2 \ge S(A,P_1)S(A,P_2) = S(A,P_1P_2)$$

und es folgt (1.2), denn Λ^+_i und $S(A,P_1)$ sind nicht-negativ.
Für Λ^- funktionert das obige Argument nicht, aber wir können schreiben:

$$\begin{aligned} \Lambda^- &= \Lambda^-_1\Lambda^+_2 + \Lambda^+_1\Lambda^-_2 - \Lambda^-_1\Lambda^-_2 = \\ &= \Lambda^-_1\Lambda^-_2 - (\Lambda^+_1 - \Lambda^-_1)(\Lambda^+_2 - \Lambda^-_2) \end{aligned}$$

Nachdem aber $\Lambda^-_i \le S(A,P_i) \le \Lambda^+_i$, können wir folgern

$$\begin{aligned} \Lambda^- &\le S(A,P_1)S(A,P_2) - (\Lambda^+_1 - S(A,P_1))(\Lambda^+_2 - S(A,P_2)) \le \\ &\le S(A,P_1)S(A,P_2) = S(A,P) \end{aligned}$$

Für die Identität (1.7) multiplizieren wir (1.5) und (1.6) mit $\rho(d_1)\rho(d_2)/d_1 d_2$ und summieren über d_1 und d_2. □

1.4 Das Sieb von Selberg

Die erste Siebmethode im heutigen Sinn wurde von Viggo Brun um 1920 entwickelt. Diese hatte jedoch das Problem, dass sie sehr technisch war und auf reiner Kombinatorik beruhte. Erst als Selberg seine Idee eines Siebes vorstellte, konnte er von der Mächtigkeit dieser Methode überzeugen. Außerdem hatte diese Methode den Vorteil, dass sie leicht erklärt werden konnte und auf einem einfachen Prinzip beruhte. Sein Sieb war in erster Linie ein Oberes-Schranken- Sieb und er versuchte

$$S(\mathcal{A}, P(z)) \leq \sum_{d|(a,P(z))} \lambda_D^+(d)$$

möglichst gut abzuschätzen, ohne den Siebbereich D zu groß zu wählen. Nachdem die λ_D^+ auch den Restterm beschrieben, sollten sie nicht zu groß sein. Dies alles erreichte er mit einer einfachen Gleichung:

$$\sum_{d|A} \lambda_D^+(d) = \left(\sum_{d_1 < \sqrt{D}} \lambda(d_1) \right)^2$$

Damit ist einerseits gesichert, dass alle $\lambda_D^+(d)$ positiv sind, und andererseits, dass wir den Siebbereich mit $z = \sqrt{D}$ um einiges größer wählen können, als im Sieb von Legendre (dort hatten wir $z = \log D$).
Das Sieb von Selberg verblüfft außerdem noch damit, dass es als einzige Voraussetzung $\rho(p) < p$ hat. Damit ist es sehr universell einsetzbar. Wir definieren uns noch eine "Komplementfunktion"

$$\rho^*(p) = p - \rho(p) \tag{1.8}$$

Wir schreiben g als:

$$g(n) = \begin{cases} \frac{\rho(n)}{\rho^*(n)} & \text{für quadratfreies } n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.9}$$

Damit können wir eine weitere wichtige arithmetische Funktion definieren, die uns noch oft im Zusammenhang mit der Siebmethode begegnen wird.

$$G(x) = \sum_{\substack{n<x \\ n|P}} g(n) \tag{1.10}$$

Wenn wir wieder wie oben

$$|\mathcal{A}_d| = X\frac{\rho(d)}{d} + r_{\mathcal{A}}(d) \quad \text{für } d \mid P, d < D \tag{1.2}$$

setzen, dann können wir folgenden Satz formulieren, der das Selberg'sche Sieb genau beschreibt.

1.4.1 Das Sieb

Satz 1.3 ([8], Satz 2.1.1). *Gelte (1.2), dann*

$$S(\mathcal{A}, P) \leq \frac{X}{G(\sqrt{D})} + E(D, P), \tag{1.11}$$

mit G wie in (1.10) und

$$E(D, P) = \frac{1}{\lambda^2(1)} \sum_{\substack{d_i < \sqrt{D} \\ d_i | P}} \lambda(d_1)\lambda(d_2) r_{\mathcal{A}}([d_1, d_2]), \tag{1.12}$$

und reellen $\lambda(d)$, die für $C \neq 0$ definiert sind durch

$$\frac{\lambda(d)\rho(d)}{d} = C\mu(d) \sum_{\substack{h \equiv 0 \bmod d \\ h < \sqrt{D} \\ h | P}} g(h) \text{ für } \rho(d) \neq 0 \tag{1.13}$$

mit $\lambda(d) = 0$, wenn $\rho(d) = 0$.

Wenn wir $d = 1$ setzen erhalten wir aus (1.13)

$$C = \frac{\lambda(1)}{G(\sqrt{D})}. \tag{1.14}$$

Hierbei wird normalerweise $\lambda(1) = 1$ gesetzt. Damit können wir die restlichen $\lambda(d)$ explizit ausrechnen:

$$\lambda(d) = C\mu(d) \frac{d}{\rho^*(d)} \sum_{\substack{(k,d)=1 \\ k < \sqrt{D}/d \\ k | P}} g(k). \tag{1.15}$$

Bevor wir nun den Satz beweisen, wollen wir uns noch ein Lemma anschauen, mit dessen Hilfe der Beweis nicht mehr so schwer fallen wird.

Lemma 1.4.1. *Sei*

$$V^+(\lambda) = \sum_{d_1 | P} \sum_{d_2 | P} \frac{\lambda(d_1)\lambda(d_2)\rho([d_1, d_2])}{[d_1, d_2]}. \tag{1.16}$$

Dann ist

$$V^+(\lambda) \sum_{\substack{h < \sqrt{D} \\ \rho(h) \neq 0}} \frac{x^2(h)}{g(h)}, \tag{1.17}$$

mit

$$x(h) = \sum_{d \equiv 0 \bmod h} \frac{\lambda(d)\rho(d)}{d}. \tag{1.18}$$

Außerdem ist

$$\frac{\lambda(d)\rho(d)}{d} \sum_k \mu(k)x(kd). \tag{1.19}$$

Beweis. Wir formen (1.16) um und erhalten

$$V^+(\lambda) = \sum_{d_1} \sum_{\substack{d_2 \\ \rho((d_1,d_2)) \neq 0}} \frac{\lambda(d_1)\rho(d_1)}{d_1} \frac{\lambda(d_2)\rho(d_2)}{d_2} \frac{(d_1,d_2)}{\rho((d_1,d_2))}.$$

Wir schreiben $f = (d_1, d_2)$. Da f quadratfrei ist, können wir den letzten Teil als Eulersches Produkt schreiben

$$\frac{f}{\rho(f)} = \prod_{p|f} \frac{p}{\rho(p)} = \prod_{p|f} \left(1 + \frac{\rho^*(p)}{\rho(p)}\right) = \sum_{h|f} \frac{1}{g(h)}.$$

Damit wäre (1.17) gezeigt, mit $x(h)$ wie in (1.18). Für den Rest betrachten wir die Möbius'sche Inversionsformel und erhalten

$$\sum_k \mu(k)x(kN) = \sum_{kN|d} \mu(k)\frac{\lambda(d)\rho(d)}{d} = \sum_{kNl=d} \cdot = \sum_{mN=d} \frac{\lambda(d)\rho(d)}{d} \sum_{k|m} \mu(k).$$

Damit wäre auch (1.19) gezeigt. □

Beweis von Satz 1.3. Der Satz folgt nun aus dem Lemma und folgender Ungleichung:

$$\lambda^2(1)S(a,P) \leq \left(\sum_{d|(a,P)} \lambda(d)\right)^2 \tag{1.20}$$

Diese gilt, denn für $(a,P) = 1$ ist $S(a,P) = 1$ und somit ist auf beiden Seiten der Wert $\lambda^2(1)$. Für $(a,P) > 1$ ist $S(a,P) = 0$ und die rechte Seite ist auf Grund des Quadrates nicht negativ. Wir formen die rechte Seite nun um zu

$$\sum_{d_1|(a,P)} \sum_{d_2|(a,P)} \lambda(d_1)\lambda(d_2) = \sum_{d_1|P} \sum_{d_2|P} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \sum_{[d_1,d_2]} 1.$$

Wir summieren über alle a aus $\mathcal{A}$ und erhalten mit ρ wie in (1.2)

$$\lambda^2(1)S(\mathcal{A},P) \leq XV^+(\lambda) + \lambda^2(1)E(D,P), \tag{1.21}$$

mit $V^+(\lambda)$ wie in (1.16) und $E(D,P)$ wie in (1.12).
Satz 1.3 folgt nun indem wir $x(k)$ derart wählen, dass der Ausdruck in (1.17) bei bekanntem $\lambda(1)$ für $V^+(\lambda)$ minimiert wird. Dazu benötigen wir die Bedingung

$$\sum_{k<\sqrt{D}} \mu(k)x(k) = \lambda(1). \tag{1.22}$$

Mit Cauchy-Schwarz erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda^2(1) &= \left(\sum_{k<\sqrt{D}} \frac{\mu(k)x(k)}{\sqrt{g(k)}} \cdot \sqrt{g(k)}\right)^2 = \\
&= \left(\sum_{k<\sqrt{D}} \frac{x^2(k)}{g(k)}\right)\left(\sum_{k<\sqrt{D}} g(k)\right) \leq \\
&\leq V^+(\lambda)G(\sqrt{D})
\end{aligned}$$

Wie bekannt ist, tritt Gleichheit auf wenn

$$x(k) = C\mu(k)g(k) \text{ für } k < \sqrt{D}$$

Damit folgt aus (1.21) das Gewünschte (1.11). Damit erfüllen die $\lambda(d)$ auch (1.19) mit ebendiesen $x(k)$ und wir erhalten

$$\frac{\lambda(d)\rho(d)}{d} = C \sum_{k<\sqrt{D}/d} \mu(k)\mu(kd)g(kd) = C\mu(d) \sum_{\substack{h\equiv 0 \bmod d \\ h<\sqrt{D}}} g(h).$$

Damit haben wir (1.13) gezeigt und damit auch den Satz. □

Bevor wir uns daran machen, das Restglied zu verbessern, wollen wir uns eine grundlegende Eigenschaft der $\lambda(d)$ anschauen. Dabei können wir den Fehlerterm so vereinfachen, dass er dem Leser sicher aus der Literatur bekannt vorkommt.

Satz 1.4. *Seien die $\lambda(d)$ definiert wie in Satz 1.3. Dann erfüllen sie die Ungleichung*

$$|\lambda(d)| \leq |\lambda(1)|$$

Wir können nun mit Hilfe von (1.12) direkt folgendes Korollar ableiten.

Korollar 1.4.1. *In Satz 1.3 gilt für den Fehlerterm*

$$E(D,P) \leq \sum_{\substack{d_i<\sqrt{D} \\ d_i|P}} |r_{\mathcal{A}}([d_1,d_2])| \,. \tag{1.23}$$

Wenn wir nun bedenken, dass für jedes $p \mid [d_1, d_2]$ es genau drei Möglichkeiten gibt (nämlich, dass p entweder d_1 oder d_2 oder beide teilt). Können wir Obiges noch zu dem aus der Literatur bekannten

$$E(D,P) \leq \sum_{d<D} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} \left| r_{\mathcal{A}}(d) \right|.$$

vereinfachen.
Nachdem wir uns nun genug über die Auswirkungen des Satzes unterhalten haben, möchte ich den einfachen Beweis antreten.

Beweis von Satz 1.4. Sei C die Konstante aus (1.14), dann gilt

$$\lambda(1) = C \sum_{h<\sqrt{D}} g(h).$$

Wir schätzen dies nun nach unten ab, indem wir ein positives d nehmen und schreiben

$$|\lambda(1)| \geq |C| \sum_{f|d} g(f) \sum_{\substack{(n,d)=1 \\ n<\sqrt{D}/d}} g(n). \tag{1.24}$$

Die Entwicklung als Euler-Produkt liefert uns dann

$$\sum_{f|d} g(f) = \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\rho(p)}{p-\rho(p)}\right) = \frac{d}{\rho^*(d)}. \tag{1.25}$$

Zusammen mit (1.24) vereinfach sich dies zu

$$|\lambda(1)| \geq |C| \frac{d}{\rho^*(d)} \sum_{\substack{(n,d)=1 \\ n<\sqrt{D}/d}} g(n) = |C| \frac{d}{\rho^*(d)} \sum_{\substack{h \equiv 0 \bmod d \\ h<\sqrt{D}}} g(h) = |\lambda(d)|,$$

womit der Satz bewiesen wäre. □

1.4.2 Die Verbesserung des Restgliedes

Nachdem wir das Sieb von Selberg aufgestellt haben, haben wir gesehen, dass die einzige Anforderung ist, dass $\rho(p) < p$. Es drängt sich also auf, dass wir versuchen, weitere Voraussetzungen zu machen um damit das Sieb zu verbessern. Hierzu fordern wir

$$\sum_{y \leq p < x} \frac{\rho(p) \log p}{p} \ll 1 + \log \frac{x}{y}. \tag{1.26}$$

Dann können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1.5 ([8], Satz 2.2.3)**.** *Sei $\rho(d)$ und $r_{\mathcal{A}}(d)$ aus (1.2) und gelte zusätzlich:*

$$|r_{\mathcal{A}}(d)| \leq \rho(d), \quad \rho(p) \geq 1 \text{ für } p \mid P, \tag{1.27}$$

und ρ erfülle (1.26). Dann gilt für den Fehlerterm aus Satz 1.3

$$E(D, P(z)) \ll \frac{D}{\log^2 D},$$

wobei die Konstante von der in (1.26) abhängt.

Wir werden mit Hilfe des nächsten Lemmas, den Satz beweisen.

Lemma 1.4.2. *Sei $f(p)$ eine positive multiplikative Funktion über den quadratfreien Zahlen, für die*

$$\sum_{y \leq p < x} \frac{f(p)\log p}{p} \leq a \log \frac{x}{y} + b$$

für alle x,y mit $y < x$ und irgendwelchen Konstanten $a > 0$ und b gilt. Dann ist

$$\sum_{m<x} f(m) \ll (a+b)\frac{x}{\log x} \sum_{m<x} \frac{f(m)}{m}$$

Beweis. Mittels partieller Integration gilt

$$\sum_{p<x} f(p)\log p \leq \int_1^x t\, d\left(a \log \frac{x}{t}\right) + bx \leq (a+b)x.$$

Wir verwenden Chebyshevs Idee für quadratfreie m und erhalten

$$\sum_{m<x} f(m)\log m = \sum_{np<x} f(np)\log p \leq \sum_{n<x} f(n) \sum_{p<x/n} f(p)\log p \leq (a+b)x \sum_{n<x} \frac{f(n)}{n} \tag{1.28}$$

Wiederum partielle Summation angewendet liefert

$$\begin{aligned}\sum_{m<x} f(m) &= 1 + \int_2^x \frac{1}{\log t}\, d \sum_{2 \leq m < t} f(m)\log m = \\ &= 1 + \frac{1}{\log x} \sum_{2 \leq m < x} f(m)\log m + \int_2^x \sum_{2 \leq m < t} f(m)\log m \frac{dt}{t\log^2 t}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (1.28) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\sum_{m<x} f(m) &\leq 1 + (a+b)\left(\sum_{n<x} \frac{f(n)}{n}\right)\left(\frac{x}{\log x} - \int_2^x td\frac{1}{\log t}\right) = \\ &= 1 + (a+b)\left(\sum_{n<x} \frac{f(n)}{n}\right)\left(\frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{\log t}\right) \ll \\ &\ll (a+b)\frac{x}{\log x} \sum_{n<x} \frac{f(n)}{n}\end{aligned}$$

wie im Lemma gefordert. □

Beweis von Satz 1.5. Mit Satz 1.3 und (1.27) folgt

$$E(D,P(z)) \le \frac{1}{\lambda^2(1)} \sum_{d_i<\sqrt{D}} |\lambda(d_1)|\,|\lambda(d_2)|\,\frac{\rho(d_1)\rho(d_2)}{\rho((d_1,d_2))}$$
$$\le \frac{1}{\lambda^2(1)} \left(\sum_{\substack{d|P \\ d<\sqrt{D}}} |\lambda(d)|\,\rho(d) \right)^2$$

Wir können uns die $\lambda(d)$ wie im Satz 1.3 ausrechnen und erhalten

$$\sum_{d<\sqrt{D}} |\lambda(d)\rho(d)| = |C| \sum_{d<\sqrt{D}} d \sum_{h\equiv 0 \bmod d} g(h) = |C| \sum_{h<\sqrt{D}} g(h)\sigma(h),$$

wobei $\sigma(h)$ für die Summe der Teiler von h steht. Nachdem $\lambda(1) = C\,G(\sqrt{D})$ ist, gilt

$$E(D,P(z)) \le \left(\frac{1}{G(\sqrt{D})} \sum_{h<\sqrt{D}} g(h)\sigma(h) \right)^2. \tag{1.29}$$

Wir setzen in (1.26) $y = p$ und $x = p + \varepsilon$ und erhalten $\rho(p) \ll p/\log p$. Damit gilt

$$g(p)\frac{\sigma(p)}{p} \ll g(p) = \frac{\rho(p)}{p-\rho(p)} \ll \frac{\rho(p)}{p}.$$

Somit auch für $f(p) = g(p)\sigma(p)$ dasselbe wie für $\rho(p)$ in (1.26). Es folgt also mit Lemma 1.4.2

$$\sum_{h<\sqrt{D}} g(h)\sigma(h) \ll \frac{\sqrt{D}}{\log D} \sum_{m<\sqrt{D}} \frac{g(m)\sigma(m)}{m}. \tag{1.30}$$

Außerdem ist

$$\sum_{m<\sqrt{D}} \frac{g(m)\sigma(m)}{m} = \sum_{ln<\sqrt{D}} \frac{g(ln)n}{ln} \ll G(\sqrt{D}). \tag{1.31}$$

Die Konstante die von $\ll$ impliziert wird, hängt nur von (1.26) ab, denn

$$\sum_{l} \frac{g(l)}{l} \ll \prod_{p} \left(1 + \frac{g(p)}{p}\right) \ll \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{p\log p}\right) \ll 1.$$

Es folgt Satz 1.5 nun aus (1.29), (1.30) und (1.31). □

1.4.3 Anwendungen

Satz 1.6 (Brun-Titchmarch). *Sei $k < x \leq y$, dann gilt*

$$\pi(y;l,k) - \pi(y-x;l,k) \leq \frac{2x}{\phi(x)\log(x/k)} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{k\log^2(x/k)}\right)$$

Dieser Satz wurde erstmals von Titchmarch bewiesen. Hierzu verwendete er das Sieb von Brun, daher auch der Name. Wir wollen ihn mit dem Selbergschen Sieb beweisen, da dadurch eine viel besser Abschätzung (ebendiese) möglich ist. Das Besondere an dieser Abschätzung ist, dass sie in keiner Weise von y abhängt. Hervorzuheben ist auch, dass wir k fast so groß wie x wählen können. Das ist nämlich im Satz von Siegel-Walfisz nicht möglich, denn dort gibt es die Beschränkung $k \leq \log^B x$ für ein $B > 0$.
Folgender Beweis ist aus [8] zu Satz 2.3.1.

Beweis. Für den Beweis erinnern wir uns an die Anwendungen des Siebes von Erathostenes-Legendre. Bereits dort hatten wir diese Differenzen abgeschätzt. Hierzu hatten wir $X = x/k$ und $Y = (y-l)/k$ gesetzt. Wir setzen $\mathcal{B} = \{kn + l : Y - X < n \leq Y\}$. Für P nehmen wir das Produkt aller Primzahlen $p < z$ mit $p \nmid k$. Dann ist

$$\pi(y;l,k) - \pi(y-x;l,k) \leq S(\mathcal{B}, P) + \pi(z;l,k)$$

$|\mathcal{B}_d|$ ist gegeben in (1.2) mit

$$\rho(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } p \nmid k \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $|r_{\mathcal{B}}(d)| \leq 1$. Wir schätzen $S(\mathcal{B}, P)$ mit Satz 1.3 ab.
Um eine gute Abschätzung zu bekommen, wollen wir $G(\sqrt{D})$ in Abhängigkeit von k bestimmen. Hierzu verwenden wir

$$\sum_{f|k} \frac{\mu^2(f)}{\phi(f)} \sum_{\substack{(n,k)=1 \\ n<\sqrt{D}}} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)} \leq \sum_{h<\sqrt{D}} \frac{\mu^2(h)}{\phi(h)}.$$

Für die Summe über die f ergibt sich dann

$$\sum_{f|k} g(f) = \prod_{p|k} \left(1 + \frac{\rho(p)}{p - \rho(p)}\right) = \frac{k}{\phi(k)}$$

und für die über h

$$\begin{aligned} \sum_{h<\sqrt{D}} \frac{\mu^2(h)}{\phi(h)} &= \sum_{h<\sqrt{D}} \frac{\mu^2(h)}{h} \prod_{p|h} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \\ &= \sum_{h<\sqrt{D}} \frac{\mu^2(h)}{h} \sum_{p|m \Rightarrow p|h} \frac{1}{m} \geq \\ &\geq \sum_{n<\sqrt{D}} \frac{1}{n} > \log\sqrt{D} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$G(\sqrt{D}) = \sum_{\substack{(g,k)=1 \\ g<\sqrt{D}}} \frac{\mu^2(g)}{\phi(g)} \leq \frac{\phi(k)}{k} \log \sqrt{D}.$$

Zur Abschätzung des Restgliedes verwenden wir Satz 1.5 und erhalten

$$S(\mathcal{B}, P(\sqrt{D})) \leq \frac{k}{\phi(k)} \frac{X}{\log \sqrt{D}} + \mathcal{O}\left(\frac{D}{\log^2 D}\right).$$

Schließlich setzen wir $D = X = x/k$ und erhalten damit Satz 1.6. $\square$

Dies war eine direkte Anwendung des Siebes von Selberg. Da wir nur in der Lage sind, obere Abschätzungen zu geben, wollen wir noch eine obere Abschätzung für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe zweier Primzahlen geben.

Satz 1.7 ([18], Satz 7.2)**.** *Sei N eine gerade ganze Zahl und sei $r(N)$ die Anzahl der Darstellungen von N als Summe zweier Primzahlen. Dann gilt*

$$r(N) \ll \frac{N}{\log^2 N} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

wobei die implizierte Konstante absolut ist.

Beweis. Wir erinnern uns, dass wir in einem früheren Abschnitt über allgemeine Anwendungen der Siebmethode sprachen. Dabei spielten auch Primzahlen als Funktionwerte von Polynomen eine Rolle. Hier werden wir nun genau die in jenem Abschnitt besprochenen Idee benützen. Wir setzen also

$$\begin{aligned} b_n &= n(N-n) \\ \mathcal{B} &= \{b_n \mid n \in [\![1, N]\!]\} \end{aligned}$$

Wir setzen $P = P(z)$ mit $2 < z \leq \sqrt{N}$ und den Siebbereich $D = z^2$. Damit werden von $S(\mathcal{B}, P)$ alle b_n ausgesiebt, die von keiner Primzahl $p < z$ geteilt werden und für die $\sqrt{N} < n < N - \sqrt{N}$ ist. Wenn nun $p \mid b_n$ für eine Primzahl $p < z$, dann teilt sie entweder n oder $N - n$. Damit folgt, dass

$$r(N) \leq 2\sqrt{N} + S(\mathcal{B}, P).$$

Wie im allgemeinen Teil vorgeschlagen, setzen wir $\rho(p)$ gleich der Anzahl der Lösungen von

$$b_n \equiv n(N-n) \equiv 0 \bmod p$$

Daraus ergibt sich für ρ

$$\rho(p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p \mid N, \\ 2 & \text{wenn } p \nmid N, \end{cases}$$

da $\mathbb{Z}_p$ ein Körper ist und $b_n \equiv 0 \bmod p$ eine quadratische Gleichung. Wir können nun jedes quadratfreie d in Primfaktoren aufteilen, die N teilen und solche die das nicht tun. Also:

$$d = p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_l$$

mit $p_i \mid N \; \forall i$ und $q_j \nmid N \; \forall j$. Dann ist $\rho(d) = 2^l$ und wir können den Rest $r_{\mathcal{B}}(d)$ abschätzen. Hierzu verwenden wir (1.2) und erhalten

$$|r_{\mathcal{B}}(d)| \leq 2^l \leq 2^{\omega(d)}.$$

Wir betrachten nun $G(z)$ und hierzu zerlegen wir n wie folgt

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i} \prod_{j=1}^{l} q_j^{s_j},$$

wobei p_i und q_j wie oben. Dann ergibt sich mit der Definition aus (1.9)

$$g(n) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{p_i - 1}\right)^{r_i} \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{2}{q_j - 2}\right)^{s_j} \geq \frac{2^{s_1 + \cdots + s_l}}{n}.$$

Wir definieren $d_N(n)$ als die Anzahl der Teiler von n die relativ prim zu N sind. Damit erhalten wir:

$$G(z) = \sum_{n<z} g(n) \geq \frac{d_N(n)}{n}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \prod_{p\mid N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} G(z) &\geq \sum_{n<z} \frac{d_N(n)}{n} \sum_{\substack{t=1 \\ p\mid t \Rightarrow p\mid N}}^{\infty} \frac{1}{t} = \\ &= \sum_{n<z} d_N(n) \sum_{\substack{t=1 \\ p\mid t \Rightarrow p\mid N}}^{\infty} \frac{1}{nt} = \\ &= \sum_{n<z} d_N(n) \sum_{\substack{w=1 \\ n\mid w \\ p\mid (w/n) \Rightarrow p\mid N}}^{\infty} \frac{1}{w} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{w=1}^{\infty} \frac{1}{w} \sum_{\substack{n<z \\ n|w \\ p|(w/n)\Rightarrow p|N}} d_N(n) \geq$$

$$\geq \sum_{w<z} \frac{1}{w} \sum_{\substack{n|w \\ p|(w/n)\Rightarrow p|N}} d_N(n).$$

Sei nun

$$w = \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i} \prod_{j=1}^{l} q_j^{v_j}$$

mit p_i und q_j wie oben. Dann gilt

$$\frac{w}{n} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i - r_i} \prod_{j=1}^{l} q_j^{v_j - s_j}$$

Jeder Primteiler von $\frac{w}{n}$ ist in der Summe auch ein Primteiler von N, damit ergibt sich unmittelbar, dass $s_j = v_j \ \forall j$ ist. Damit ist

$$d_N(n) = \prod_{j=1}^{l} (v_j + 1).$$

Damit können wir die innere Summe ausrechnen zu

$$\sum_{\substack{n|w \\ p|(w/n)\Rightarrow p|N}} d_N(n) = \sum_{\substack{n|w \\ p|(w/n)\Rightarrow p|N}} \prod_{j=1}^{l} (v_j + 1) = \prod_{i=1}^{k} (u_i + 1) \prod_{j=1}^{l} (v_j + 1) = d(w).$$

Wir setzen nun $z = N^{1/8}$ und benutzen die Abschätzung für die Teilerfunktion aus dem Anhang und erhalten

$$\prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} G(z) \geq \sum_{w<z} \frac{d(w)}{w} \gg \log^2 z \gg \log^2 N.$$

Damit erhalten wir für den Hauptteil der Siebformel

$$\frac{|\mathcal{B}|}{G(z)} \ll \frac{N}{\log^2 N} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{N}{\log^2 N} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \ll$$

$$\ll \frac{N}{\log^2 N} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Wir müssen nun noch den Restterm abschätzen:

$$E(z^2, P) = \sum_{\substack{d<z^2 \\ d|P}} 3^{\omega(d)} |r(d)| \leq \sum_{\substack{d<z^2 \\ d|P}} 6^{\omega(d)} \leq \sum_{d<z^2} 6^{\omega(d)}$$

Da

$$6^{\omega(d)} = (2^{\omega(d)})^{\log 6/\log 2} \leq d^{\log 6/\log 2} < z^{2\log 6/\log 2}$$

ist, können wir den Rest weiter abschätzen zu

$$E(z^2, P) < \sum_{d<z^2} z^{2\log 6/\log 2} < z^{2+2\log 6/\log 2} < z^{7.2} = N^{9/10}$$

Es folgt also für $r(N)$

$$r(N) \leq 2\sqrt{N} + S(\mathcal{B}, P) \ll 2\sqrt{N} + \frac{N}{\log^2 N} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) + N^{9/10} \ll \frac{N}{\log^2 N} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

womit der Satz bewiesen wäre. □

1.5 Das Große Sieb

Dieses Sieb geht zurück auf eine Arbeit von Linnik im Jahre 1941[13]. In einer Folge von Arbeiten verbesserte Rényi dieses Sieb, bis ihm schließlich Roth [25] in seinen Arbeiten die heutige Gestalt gab.

1.5.1 Die Idee

Die zentrale Idee des Siebes ist es, eine ähnliche Abschätzung wie die Bessel-Ungleichung zu finden. Diese besagt, dass wenn $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_R$ ein Orthonormalsystem eines inneren Produktraumes V über den Komplexen Zahlen ist, dann gilt für alle $\xi \in V$

$$\sum_{r=1}^{R} |\langle \xi, \phi_r \rangle|^2 \leq \|\xi\|^2 .$$

Das Problem ist jedoch, dass wir nicht immer ein Orthonormalsystem haben, aber wir haben beinahe eines. Um dieser "Entfernung" gerecht zu werden, versuchen wir eine Ungleichung der Form

$$\sum_{r=1}^{R} |\langle \xi, \phi_r \rangle|^2 \leq A \|\xi\|^2 . \tag{1.32}$$

zu bestimmen, wobei A eine Konstate ist, die nur von den ϕ_r abhängt. Dabei hoffen wir natürlich, dass je "näher" die ϕ_r einem Orthonormalsystem sind, desto näher soll A 1 sein. Boas [1] gelang es die Konstante A zu charakterisieren und zwar wie folgt:

Satz 1.8 (Boas). *Die Ungleichung (1.32) hält für alle $\xi \in V$ genau dann, wenn*

$$\sum_{\substack{1\le r\le R\\ 1\le s\le R}} u_r\overline{u}_s \langle \phi_r, \phi_s\rangle \le A\sum_{r=1}^{R} |u_r|^2 \tag{1.33}$$

Beweis. • **"$\Leftarrow$":** Es gilt mit (1.33)

$$\begin{aligned} 0 &\le \left\|\xi - \sum_{r=1}^{R} u_r\phi_r\right\|^2 = \\ &= \|\xi\|^2 - 2\Re\sum_{r=1}^{R}\overline{u}_r\langle \xi,\phi_r\rangle + \sum_{r,s} u_r\overline{u}_s\langle\phi_r,\phi_s\rangle \le \\ &\le \|\xi\|^2 - 2\Re\sum_{r=1}^{R}\overline{u}_r\langle \xi,\phi_r\rangle + A\sum_{r=1}^{R}|u_r|^2 \end{aligned}$$

Wir setzen nun $u_r = (\xi,\phi_r)/A$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\le \|\xi\|^2 - 2\Re\sum_{r=1}^{R}\overline{u}_r\langle \xi,\phi_r\rangle + A\sum_{r=1}^{R}|u_r|^2 = \\ &= \|\xi\|^2 - \frac{1}{A}\sum_{r=1}^{R}|\langle\xi,\phi_r\rangle|^2 \end{aligned}$$

Hier ist die Ähnlichkeit mit Bessels-Ungleichung zu erkennen, denn wenn ϕ_r ein Orthonormalsystem ist, ergibt sich aus letzterem $A = 1$.

• **"$\Rightarrow$":** Sei nun (1.32) gültig für alle $\xi \in V$, dann wählen wir $\xi = \sum_{r=1}^{R} u_r\phi_r$. Die linke Seite von (1.33) ist dann

$$\|\xi\|^2 = \sum_{s=1}^{R}\overline{u}_s\langle\xi,\phi_s\rangle\,.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung gilt dann

$$\le \left(\sum_{s=1}^{R}|u_s|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{s=1}^{R}|\langle\xi,\phi_s\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

und nun verwenden wir (1.32)

$$\le A^{\frac{1}{2}}\|\xi\|\left(\sum_{s=1}^{R}|u_s|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun dividieren wir durch $\|\xi\|$ und quadrieren danach beide Seiten. Wir erhalten somit

$$\|\xi\|^2 \leq A \sum_{s=1}^{R} |u_s|^2$$

und das entspricht (1.33)

□

Wir wollen nun (1.33) verwenden um A abschätzen zu können. Wir haben

$$|u_r \overline{u}_s| \leq \tfrac{1}{2} |u_r|^2 + \tfrac{1}{2} |u_s|^2$$

und daraus folgt für die linke Seite von (1.33)

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leq r \leq R \\ 1 \leq s \leq R}} u_r \overline{u}_s \langle \phi_r, \phi_s \rangle &\leq \sum_{r,s} \left(\tfrac{1}{2} |u_r|^2 + \tfrac{1}{2} |u_s|^2 \right) |\langle \phi_r, \phi_s \rangle| = \\
&= \sum_r |u_r|^2 \sum_{s=1}^{R} |\langle \phi_r, \phi_s \rangle| \leq \\
&\leq \left(\max_r \sum_{s=1}^{R} |\langle \phi_r, \phi_s \rangle| \right) \sum_{r=1}^{R} |u_r|^2 .
\end{aligned}$$

Damit gilt mit (1.33) für A

$$A = \max_r \sum_{s=1}^{R} |\langle \phi_r, \phi_s \rangle| . \tag{1.34}$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen

Satz 1.9 ([4], Satz 27.1)**.** *Seien $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_R$ und ξ Vektoren aus einem inneren Produktraum V über den komplexen Zahlen, dann gilt*

$$\sum_{r=1}^{R} |\langle \xi, \phi_r \rangle|^2 \leq A \|\xi\|^2 ,$$

wobei A wie in (1.34).

In diesem Satz erhalten wir die eingangs gewüschten Eigenschaften:

- Wenn die ϕ_r ein Orthonormalsystem bilden, so reduziert sich die Ungleichung zu der von Bessel. Diese ist sozusagen ein Spezialfall.
- Wenn die Matrix $[\langle \phi_r, \phi_s \rangle]$ der Einheitsmatrix sehr ähnlich ist, so ist auch A sehr nahe bei 1.

1.5.2 Exponentialsummen

Rényi wendete diese Ungleichung direkt auf arithmetische Funktionen an. Roth hingegen begann bereits, sie in Verbindung mit Exponentialsummen zu bringen. Hier wollen wir aber der Idee von Davenport und Halberstam [5] folgen. Wir betrachten dazu das Große Sieb als eine Ungleichung im folgenden Sinn: Sei

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha) \tag{1.35}$$

mit M und N ganzen Zahlen, $N > 0$. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_R$ paarweise verschieden (mod 1) und sei $\delta > 0$ derart, dass $\|\alpha_r - \alpha_s\| \geq \delta$ für $r \neq s$. Dann gilt für passende a_n

$$\sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r)|^2 \leq \Delta \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 . \tag{1.36}$$

Wobei Δ nur von N und δ abhängt. Zuerst wollen wir festhalten, dass

$$T(\alpha) = \sum_{n=K+1}^{K+N} a_{M-K+n} e(n\alpha) = e((K-M)\alpha)S(\alpha)$$

und somit ist $|T(\alpha)| = |S(\alpha)|$. Damit ist $|S(\alpha)|$ nicht von der Wahl von M abhängig. Weiters ist der Fall $R = 1$ von Interesse, da mittels der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung folgt, dass

$$|S(\alpha)|^2 \leq N \sum_{M+1}^{M+N} |a_n|^2 . \tag{1.37}$$

Diese Abschätzung ist bestmöglich, da Gleichheit für $a_n = e(-n\alpha)$ herrscht. Daher folgt unmittelbar $\Delta \geq N$. Auf der anderen Seite ist,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r + \beta)|^2 \, d\beta &= \int_0^1 \sum_{r=1}^{R} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n(\alpha_r + \beta)) \right|^2 d\beta = \\
&= \int_0^1 \sum_{r=1}^{R} \sum_{i=M+1}^{M+N} \sum_{j=M+1}^{M+N} a_i \overline{a}_j e(i(\alpha_r + \beta)) e(-j(\alpha_r + \beta)) d\beta = \\
&= \int_0^1 \sum_{i=M+1}^{M+N} \sum_{j=M+1}^{M+N} a_i \overline{a}_j e(i(\beta)) e(-j(\beta)) d\beta = \\
&= R \int_0^1 |S(\beta)|^2 \, d\beta = \\
&= R \sum_{M+1}^{M+N} |a_n|^2 ,
\end{aligned}$$

sodass es ein β gibt für welches

$$\sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r + \beta)|^2 \geq R \sum_{M+1}^{M+N} |a_n|^2$$

Wenn nun $\delta R \leq 1$ ist, dann können wir R Punkte wählen, die mindestens δ voneinander entfernt sind. Daraus folgt für R, dass es maximal $[\delta^{-1}] \geq \delta^{-1} - 1$ ist. Bestmöglich wäre demnach $\Delta = N + \delta^{-1} - 1$. Dies wurde von Bombieri und Davenport in [3] bestätigt, denn sie fanden Folgen (a_n) mit $\Delta = N + \delta^{-1} - 1$. Andererseits gelang es Montgomery und Vaughan in [15] die Schranke von oben auf $\Delta = N + \delta^{-1}$ zu senken. Doch bevor wir dies zeigen wollen, zunächst ein paar Lemmata.

Lemma 1.5.1 ([11], Satz 15)**.** *Sei $B > 0$, dann ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\sum_i a_i^2 \leq A$, dass*

$$\sum_{i,j} a_i b_j \leq A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}$$

für alle b_j für die $\sum_j b_j^2 \leq B$ ist.

Beweis. Das die Bedingung notwendig ist, folgt direkt aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung. Sei $\sum_i a_i^2 > A$, dann können wir die b_j so wählen, dass $\sum_j b_j^2 = B$ und $b_i = \mu a_i$ mit $\mu > 0$, dann ist aber

$$\sum_{i,j} a_i b_j = \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j b_j^2\right)^{\frac{1}{2}} > A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}$$

□

Lemma 1.5.2. *Sei $[c_{rn}]$ eine passende $R \times N$ Matrix und A, sodass*

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{r=1}^{R} c_{rn} v_r \right|^2 \leq A \sum_{r=1}^{R} |v_r|^2$$

für beliebige komplexe v_r. Dann ist

$$\sum_{r=1}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} c_{rn} w_n \right|^2 \leq A \sum_{n=1}^{N} |w_n|^2$$

für alle w_n.

Das System ist sozusagen selbst-dual.

Beweis. Wir setzen

$$\sum_r c_{rn} v_r = V_n, \quad \sum_n c_{rn} w_n = W_r$$

und

$$C = \sum_r \sum_n c_{rn} v_r w_n = \sum_r v_r W_r = \sum_n w_n V_n$$

Dann zeigen wir, dass die folgenden drei Ungleichungen äquivalent sind

$$|C|^2 \leq A \sum_r |v_r|^2 \sum_n |w_n|^2 \tag{1.38}$$

$$\sum_n \left| \sum_r c_{rn} v_r \right|^2 \leq A \sum_r |v_r|^2 \tag{1.39}$$

$$\sum_r \left| \sum_n c_{rn} w_n \right|^2 \leq A \sum_n |w_n|^2 \tag{1.40}$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung und unserer Definition von C folgt

$$C = \sum_n w_n V_n \leq \left(\sum_n |w_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |V_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Damit ist (1.39) auch hinreichend für die Wahrheit von (1.38). Andererseits folgt aus Lemma 1.5.1 die Notwendigkeit. Somit sind (1.39) und (1.38) äquivalent. Analog folgt die Äquivalenz von (1.40) und (1.38) □

Lemma 1.5.3. *Die Ungleichung*

$$\csc^2 \pi x + 2 |\cot \pi x \csc \pi x| \leq 3\pi^{-2} \|x\|^{-2}$$

gilt für alle reellen x.

Beweis. Der Ungleichung entspricht, wenn wir nur Sinus und Cosinus verwenden

$$\frac{1}{\sin^2 \pi x} + 2 \left| \frac{\cos \pi x}{\sin^2 \pi x} \right| \leq 3\pi^{-2} \|x\|^{-2}$$

Nun sind aber alle beteiligten Funktionen 1-periodisch und symmetrisch bezüglich $\frac{1}{2}$ in x. Deswegen betrachten wir $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ und setzen $\pi x = \phi$. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{\sin^2 \phi} + 2 \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \leq 3\phi^{-2}$$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$3\sin^2\phi - \phi^2(1 + 2\cos\phi) \geq 0$$

für $0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi$. Wenn wir die linke Seite in eine Potenzreihe entwickeln erhalten wir

$$\begin{aligned}
3\sin^2\phi - \phi^2(1 + 2\cos\phi) &= \frac{3}{2}(1 - \cos(2\phi)) - \phi^2(1 + 2\cos\phi) = \\
&= \frac{3}{2} - \phi^2 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\frac{(2\phi)^{2n}}{(2n)!} - 2\frac{\phi^{2n+2}}{(2n)!}\right) = \\
&= -\phi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\frac{(2\phi)^{2n}}{(2n)!} - 4n(2n-1)\frac{\phi^{2n}}{(2n)!}\right) = \\
&= \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\phi^{2n}}{(2n)!}(3 \cdot 2^{2n-1} - 4n(2n-1))
\end{aligned}$$

Die Reihenglieder sind streng monoton fallend für $|\phi| \leq 2$ und das Erste ist positiv. Damit ist die Reihe positiv, was zu zeigen war. □

Lemma 1.5.4. *Seien $x_1, x_2, \ldots, x_R$ reelle Zahlen paarweise verschieden modulo 1 und sei*

$$\delta = \min_{r,s} \|x_r - x_s\|.$$

Dann gilt

$$\left|\sum_{r,s} u_r \overline{u}_s \csc\pi(x_r - x_s)\right| \leq \delta^{-1}\sum_r |u_r|^2 \tag{1.41}$$

Beweis. Im gesamgten Beweis steht $\sum'$ für die Summe über endliche Elemente. Die Form (1.41) ist bilinear und antihermitisch. Um das einzusehen, schreiben wir

$$\left|\sum_{r,s} u_r \overline{u}_s \csc\pi(x_r - x_s)\right| \leq \delta^{-1}\sum_r |u_r|^2 = \underline{u}^* M \underline{u}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
\underline{u} &= (u_1, u_2, \ldots, u_R) \\
M &= \begin{pmatrix}
0 & \csc\pi(x_1 - x_2) & \ldots & \csc\pi(x_1 - x_R) \\
\csc\pi(x_2 - x_1) & 0 & \ldots & \csc\pi(x_2 - x_R) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\csc\pi(x_R - x_1) & \csc\pi(x_R - x_2) & \ldots & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Matrix ist antihermitesch und daher sind alle ihre Eigenwerte rein komplex. Es genügt also in Folge, wenn wir die Bilinearform durch die Eigenvektoren, der Matrix M abschätzen. Dann ergibt sich für die u_r, wie man sehr leicht nachrechnet

$$\sum_r{}' u_r \csc \pi(x_r - x_s) = \imath \mu u_s \tag{1.42}$$

für $1 \leq s \leq R$. Ohne Beschränkung dürfen wir die u_r normalisieren, sodass

$$\sum_r |u_r|^2 = 1. \tag{1.43}$$

Es genügt also (1.41) mit u_r zu zeigen, die den Bedingungen (1.42) und (1.43) genügen. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefert uns dann

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r,s}{}' u_r \overline{u}_s \csc \pi(x_r - x_s) \right|^2 &\leq \sum_r \left| \sum_s{}' \overline{u}_s \csc \pi(x_r - x_s) \right|^2 = \\ &= \sum_{s,t} \overline{u}_s u_t \sum_r{}' \csc \pi(x_r - x_s) \csc \pi(x_r - x_t) = \\ &= S_1 + S_2 \end{aligned} \tag{1.44}$$

wobei

$$S_1 = \sum_s |u_s|^2 \sum_r{}' \csc^2 \pi(x_r - x_s) \tag{1.45}$$

und

$$S_2 = \sum_{s \neq t} \overline{u}_s u_t \sum_r{}' \csc \pi(x_r - x_s) \csc \pi(x_r - x_t). \tag{1.46}$$

Nachdem in S_2 die Variablen r, s und t voneinander unabhängig sind, können wir schreiben

$$\csc \pi(x_r - x_s) \csc \pi(x_r - x_t) = \csc \pi(x_s - x_t) \left(\cot \pi(x_r - x_s) - \cot \pi(x_r - x_t) \right).$$

Dadurch können wir S_2 aufspalten.

$$\begin{aligned} S_2 = &\sum_{s \neq t} \overline{u}_s u_t \sum_r{}' \csc \pi(x_s - x_t) \left(\cot \pi(x_r - x_s) - \cot \pi(x_r - x_t) \right) = \\ = &\sum_{s \neq t} \overline{u}_s u_t \csc \pi(x_s - x_t) \sum_r{}' \cot \pi(x_r - x_s) \\ &- \sum_{s \neq t} \overline{u}_s u_t \csc \pi(x_s - x_t) \sum_r{}' \cot \pi(x_r - x_t) = \\ = &\sum_{s,t,r}{}' \overline{u}_s u_t \csc \pi(x_s - x_t) \cot \pi(x_r - x_s) - \sum_{s,t,r}{}' \overline{u}_s u_t \csc \pi(x_s - x_t) \cot \pi(x_r - x_t) - \end{aligned}$$

$$- {\sum_{s,r}}' \overline{u}_s u_r \csc \pi(x_s - x_r) \cot \pi(x_r - x_s) + {\sum_{t,r}}' \overline{u}_r u_t \csc \pi(x_r - x_t) \cot \pi(x_r - x_t) =$$

$$= S_3 - S_4 + {\sum_{s,r}}' (\overline{u}_s u_r + \overline{u}_r u_s) \csc \pi(x_r - x_s) \cot \pi(x_r - x_s) =$$

$$= S_3 - S_4 + 2\Re {\sum_{s,r}}' \overline{u}_s u_r \csc \pi(x_r - x_s) \cot \pi(x_r - x_s) =$$

Dann ist $S_2 = S_3 - S_4 + 2\Re S_5$, wobei

$$S_3 = {\sum_{r,s,t}}' \overline{u}_s u_t \csc \pi(x_s - x_t) \cot \pi(x_r - x_s), \tag{1.47}$$

$$S_4 = {\sum_{r,s,t}}' \overline{u}_s u_t \csc \pi(x_s - x_t) \cot \pi(x_r - x_t), \tag{1.48}$$

und

$$S_5 = {\sum_{r,s}}' \overline{u}_s u_t \csc \pi(x_r - x_s) \cot \pi(x_r - x_s), \tag{1.49}$$

Wir zeigen nun, dass $S_3 = S_4$. Hierzu nehmen wir (1.47) und (1.42) und erhalten

$$S_3 = {\sum_{r,s}}' \overline{u}_s \cot \pi(x_r - x_s)(-\imath\mu u_s) = -\imath\mu {\sum_{r,s}}' |u_s|^2 \cot \pi(x_r - x_s).$$

Analog folgt aus (1.48) und (1.42)

$$S_4 = {\sum_{r,t}}' \overline{u}_s \cot \pi(x_r - x_t)(-\imath\mu u_t) = -\imath\mu {\sum_{r,t}}' |u_t|^2 \cot \pi(x_r - x_t).$$

Somit ist $S_1 + S_2 = S_1 + 2\Re S_5 \leq S_1 + 2|S_5|$. Wir verwenden die Ungleichung $2|\overline{u}_s u_r| \leq |u_s|^2 + |u_r|^2$ in (1.49), sodass sich mit (1.45)

$$S_1 + S_2 \leq {\sum_{r,s}}' |u_r|^2 \left(\csc^2 \pi(x_r - x_s) + 2|\csc \pi(x_r - x_s) \cot \pi(x_r - x_s)|\right)$$

ergibt. Letzteres ist unter Verwendung von Lemma 1.5.4

$$\leq 3\pi^{-2} \sum_r |u_r|^2 {\sum_s}' \|x_r - x_s\|^{-2}$$

Nachdem $\min_{r,s} \|x_r - x_s\| = \delta$, folgt

$${\sum_s}' \|x_r - x_s\|^{-2} < 2\sum_{k=1}^{\infty}(k\delta)^{-2} = \frac{\pi^2}{3}\delta^{-2}$$

Dies kombinieren wir mit oben, und erhalten

$$S_1 + S_2 < \delta^{-2}$$

Wir werfen schließlich noch einen Blick auf (1.44) und erhalten das Gewünschte. □

Nachdem wir uns das Werkzeug zurechtgelegt haben, können wir den Satz recht einfach beweisen:

Satz 1.10 (Montgomery & Vaughan [15])**.** *Sei $S(\alpha)$ wie in (1.35) und δ wie in Lemma 1.5.4, dann gilt*

$$\sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r)|^2 \leq (N + \delta^{-1}) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 . \tag{1.50}$$

Beweis. Um (1.50) zu zeigen verwenden wir Lemma 1.5.2 mit $c_{rn} = e((M+n)\alpha_r)$. Dann genügt es zu zeigen, dass

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \left| \sum_{r=1}^{R} v_r e(n\alpha_r) \right|^2 \leq \left(N + \delta^{-1}\right) \sum_{r=1}^{R} |v_r|^2 .$$

Wir quadrieren die linke Seite und erhalten

$$N \sum_{r=1}^{R} |v_r|^2 + \sum_{r=1}^{R} \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq r}}^{R} v_r v_s \sum_{n=M+1}^{M+N} e(n(\alpha_r - \alpha_s)).$$

Die rechteste innere Summe ist eine geometrische Reihe und daher

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=M+1}^{M+N} e(n(\alpha_r - \alpha_s)) = \\
&e\left((M+1)\left(\alpha_r - \alpha_s\right)\right) \frac{e\left(N(\alpha_r - \alpha_s)\right) - 1}{e\left(\alpha_r - \alpha_s\right) - 1} = \\
&\frac{e\left((M + N + \frac{1}{2})(\alpha_r - \alpha_s)\right) - e\left(\left(M + \frac{1}{2}\right)(\alpha_r - \alpha_s)\right)}{e\left(\frac{\alpha_r - \alpha_s}{2}\right) - e\left(-\frac{\alpha_r - \alpha_s}{2}\right)} = \\
&\frac{1}{2}\imath \left(e\left(\left(M + \frac{1}{2} \right) (\alpha_r - \alpha_s) \right) - e\left(\left(M + N + \frac{1}{2} \right) (\alpha_r - \alpha_s) \right) \right) \csc \pi(\alpha_r - \alpha_s).
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun (1.41) einmal mit $u_r = v_r e\left((M + \frac{1}{2})\alpha_r\right)$ und einmal mit $u_r = v_r e\left((M + N + \frac{1}{2})\alpha_r\right)$. Damit erhalten wir das Gewünschte. □

1.5.3 Anwendungen

Um dieses Kapitel etwas abzurunden, möchte ich noch einige Anwendungen des Großen Siebes zeigen, die wir später im Satz von Bombiery-Vinogradov (Satz 2.2) verwenden. Dabei sind unsere Punkte α_r die Farey-Brüche a/q, wobei $(a,q)=1$ und $q \leq Q$. Dann gilt für je zwei verschiedene a/q und a'/q'

$$\left\| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right\| = \left\| \frac{aq' - a'q}{qq'} \right\| \geq \frac{1}{qq'} \geq \frac{1}{Q^2}.$$

Wir verwenden also in Folge das Große Sieb mit $\delta = Q^{-2}$ und erhalten

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq (N + Q^2) \sum_{M+1}^{M+N} |a_n|^2 . \tag{1.51}$$

Zunächst ein paar Definitionen: Sei $\mathcal{N}$ eine Menge aus Z ganzen Zahlen im Intervall $M+1 \leq n \leq M+N$ und sei $Z(q,h)$ die Anzahl aller ganzen Zahlen aus $\mathcal{N}$ die kongruent zu h (mod q) sind. Es gilt also:

$$\sum_{h=1}^{q} Z(q,h) = Z.$$

$Z(q,h)$ besteht durchschnittlich aus Z/q Elementen und wir betrachten hier die "Varianz"

$$V(q) = \sum_{k=1}^{q} \left(Z(q,h) - \frac{Z}{q} \right)^2 .$$

Auf Grund des Großen Siebes wissen wir, dass die Anzahl der $V(p)$ im Mittel relativ klein ist, nämlich

$$\sum_{p \leq Q} pV(p) \leq (N + Q^2) Z. \tag{1.52}$$

Um dies zu sehen, seien die a_n die charakteristische Funktion von $\mathcal{N}$ und daher

$$S(\alpha) = \sum_{n \in \mathcal{N}} e(n\alpha).$$

Dann ist

$$\sum_{a=1}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 = \sum_{m \in \mathcal{N}} \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{a(m-n)}{q} \right).$$

Die innerste Summe ist q oder 0, je nachdem ob $m \equiv n \pmod q$ oder nicht. Daher

$$= q \sum_{m \in \mathcal{N}} \sum_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ m \equiv n \bmod q}} 1 = q \sum_{h=1}^{q} Z(q,h)^2.$$

Nun widmen wir uns wieder $V(q)$ und lösen das Quadrat auf und erhalten

$$\begin{aligned} qV(q) &= q\sum_{h=1}^{q} Z(q,h)^2 - 2Z\sum_{h=1}^{q} Z(q,h) + Z^2 = \\ &= \sum_{a=1}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 - Z^2. \end{aligned}$$

Andererseits ist $S(0) = Z$, sodass

$$qV(q) = \sum_{a=1}^{q-1} \left| S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2.$$

Mit (1.51) folgt

$$\sum_{p\leq Q} pV(p) = \sum_{p\leq Q}\sum_{a=1}^{p-1} \left| S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \leq (N+Q^2)Z.$$

Wir verwenden nun (1.52) um folgenden Satz zu zeigen:

Satz 1.11. *Sei $\mathcal{N}$ eine Menge von Z ganzen Zahlen im Intervall $M+1 \leq n \leq M+N$. Sei $\mathbb{P}$ eine Menge mit P Primzahlen p, mit $p \leq Q$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Sei $0 < \tau < 1$ und sei $Z(p,h) = 0$ für mindestens τp Werte von $h \pmod p$, für alle $p \in \mathbb{P}$. Dann gilt*

$$Z \leq \frac{N+Q^2}{\tau P}.$$

Beweis. Für $p \in \mathbb{P}$ gilt $V(p) \geq \tau p(Z/p)^2$, sodass mit (1.52) gilt

$$\tau P Z^2 \leq (N+Q^2)Z,$$

woraus der Satz folgt. □

Eine weitere Anwendung die wir direkt beweisen können ist die folgende von Gallagher ([6]):

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q}{}' |S(\chi)|^2 \leq \frac{1}{q} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2. \tag{1.53}$$

Beweis. Um (1.53) zu beweisen, erinnern wir uns an die Gauss'schen Summen für einen Charakter $\chi \pmod q$

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{q} \chi(a) e\left(\frac{a}{q}\right).$$

Aus der elementaren Zahlentheorie ist bekannt, dass $|\tau(\chi)| = q^{\frac{1}{2}}$ und für jede ganze Zahl n ist

$$\tau(\overline{\chi})\chi(n) = \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) e\left(\frac{an}{q}\right).$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit a_n und summieren von $n = M+1$ bis $M+N$ und erhalten

$$\tau(\overline{\chi})S(\chi) = \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) S\left(\frac{a}{q}\right),$$

für primitive χ. Damit ergibt sich

$$q \sum_{\chi \bmod q}{}' |S(\chi)|^2 \leq \sum_{\chi} \left| \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 = \phi(q) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2.$$

□

Um den Satz von Bombieri-Vinogradov zu zeigen, brauchen wir noch ein kleines Hilfsmittel, das ich bereits an dieser Stelle anführen will, da es thematisch hier besser passt. Hierbei interessieren wir uns dafür, wie die Ungleichung sich verhält, wenn wir eine stetig fallende Funktion $\lambda = \lambda(x)$ im Intervall $D \leq x \leq Q$ hinzunehmen. Genauer gesagt wollen wir zeigen, dass

$$\sum_{D<q\leq Q} \lambda(q) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \ll \left(\lambda(D)(D^2+N) + \int_D^Q \lambda(x) x dx \right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2. \tag{1.54}$$

Beweis. Für den Beweis von (1.54) setzen wir

$$Z = \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 \text{ und}$$

$$G(x) = \sum_{q \leq x} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq (x^2+N)Z.$$

Wir schreiben die linke Seite von (1.54) als Stilgjes-Integral und integrieren partiell. Dann erhalten wir

$$\int_D^Q \lambda(x) dG(x) = \lambda(Q)G(Q) - \lambda(D)G(D) - \int_D^Q G(x) d\lambda(x).$$

Damit ist die linke Seite von (1.54)

$$\ll \lambda(Q)(Q^2+N)Z - \int_D^Q (x^2+N) Z d\lambda(x).$$

Es folgt nun (1.54) indem wir wieder partiell integrieren. □

Kapitel 2

Primzahlverteilungen

Mit diesem Kapitel möchte ich einen kleinen Einblick in die größten Errungenschaften der Primzahlthoerie geben. Vor allem der Satz von Bombieri-Vinogradov ist mir ein besonderes Anliegen, da wir ihn mehrmals im Beweis von Ramaré verwenden werden. Hier wollen wir eine allgemeiner Abschätzung geben, während im letzen Kapitel die von $\ll$ implizierte Konstante für gewisse Moduln explizit ausgerechnet wird.

2.1 Die Ungleichung von Pólya und Vinogradov

Sei χ nicht der triviale Charakter $\pmod q$. Nachdem $\sum_{n=1}^{q} \chi(n) = 0$, ist es offensichtlich, dass $\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \ll q$ für beliebige M und N. In diesem Abschnitt interessieren wir uns für eine schärfere Abschätzung. Im Jahre 1918 konnten Pólya und Vinogradov unabhängig voneinander zeigen, dass

Satz 2.1 (Pólya-Vinogradov [4])**.**

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \ll q^{\frac{1}{2}} \log q \tag{2.1}$$

für nicht-triviale Charaktere $\chi \pmod q$.

Beweis. Wir orientieren uns hier an einem Beweis von Schur (siehe [28]). Er zeigte zuerst

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \right| < q^{\frac{1}{2}} \log q \tag{2.2}$$

für nicht-triviale Charaktere $\chi \pmod q$, $q > 1$. Aus der Elementaren Zahlentheorie wissen wir, dass wir den Charakter mittels Gauss'-Summen explizit darstellen können:

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) e\left(\frac{an}{q}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) \sum_{n=M+1}^{M+N} e\left(\frac{an}{q}\right).$$

Wir wissen auch, dass $|\tau(\overline{\chi})| = q^{\frac{1}{2}}$. Die innere Summe ist eine geometrische Reihe und daher

$$\begin{aligned}\sum_{n=M+1}^{M+N} e\left(\frac{an}{q}\right) &= e\left(\frac{a(M+1)}{q}\right) \frac{e\left(\frac{a(M+N+1)}{q}\right)-1}{e\left(\frac{a}{q}\right)-1} \\ &= e\left(\frac{(M+\frac{1}{2}N+\frac{1}{2})a}{q}\right) \frac{\sin \pi Na/q}{\sin \pi a/q}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n)\right| \leq q^{-\frac{1}{2}} \sum_{a=1}^{q-1} \frac{1}{|\sin \pi a/q|}. \tag{2.3}$$

Für konvexe Funktionen $f(\alpha)$ gilt

$$f(\alpha) \leq \frac{1}{\delta} \int_{\alpha-\frac{1}{2}\delta}^{\alpha+\frac{1}{2}\delta} f(\beta) d\beta$$

Dies verwenden wir nun mit $f(\alpha) = (\sin \pi\alpha)^{-1}$ und $\delta = 1/q$, dann ergibt sich für die Summe (2.3)

$$\leq q \sum_{a=1}^{q-1} \int_{\frac{a}{q}-\frac{1}{2q}}^{\frac{a}{q}+\frac{1}{2q}} (\sin \pi\beta)^{-1} d\beta = q \int_{\frac{1}{2q}}^{1-\frac{1}{2q}} (\sin \pi\beta)^{-1} d\beta = 2q \int_{\frac{1}{2q}}^{\frac{1}{2}} (\sin \pi\beta)^{-1} d\beta.$$

Nun ist aber $\sin \pi\beta < 2\beta$ für $0 < \beta < \frac{1}{2}$ und somit

$$< 2q \int_{\frac{1}{2q}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\beta}{2\beta} = q \log q$$

Das heißt, wir haben (2.2) für primitive χ gezeigt.
Sei nun χ kein primitiver Charakter, dann wird $\chi \pmod q$ von $\chi_1 \pmod{q_1}$ erzeugt und $q_1 \mid q$. Daher können wir $q = q_1 r$ schreiben und erhalten:

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) = \sum_{\substack{n=M+1 \\ (n,r)=1}}^{M+N} \chi_1(n).$$

Wir verwenden nun die Möbius-Funktion und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) &= \sum_{n=M+1}^{M+N} \chi_1(n) \sum_{\substack{d|n \\ d|r}} \mu(d) = \\ &= \sum_{d|r} \mu(d) \sum_{\substack{n=M+1 \\ d|n}}^{M+N} \chi_1(n) = \\ &= \sum_{d|r} \mu(d)\chi_1(d) \sum_{(M+1)/d \le m \le (M+N)/d} \chi_1(m)\end{aligned}$$

Nachdem χ_1 primitiv ist, können wir für die innere Summe (2.2) verwenden. Dann erhalten wir

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \right| < q_1^{\frac{1}{2}} (\log q_1) \sum_{d|r} |\mu(d)| = 2^{\omega(r)} q_1^{\frac{1}{2}} (\log q_1)$$

Wobei $\omega(r)$ für die Anzahl der Primteiler von r steht. Andererseits ist $2^{\omega(r)} \le d(r) \ll r^{\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$. Genauer gesagt können wir $\varepsilon = \frac{1}{2}$ wählen, denn

$$d(r) = \sum_{d|r} 1 \le 2 \sum_{\substack{d|r \\ d \le \sqrt{r}}} 1 \le 2\sqrt{r}$$

Damit erhalten wir (2.2) auch für nicht primitive Charaktere und somit (2.1). □

Es zeigt sich, dass (2.1) fast bestmöglich ist, da Paley in seiner Arbeit zeigen konnte, dass

$$\max_N \left| \sum_{n \le N} \left(\frac{d}{n} \right) \right| > \frac{1}{7} \sqrt{d} \log \log d.$$

und auf der anderen Seite folgt mit der Großen Riemann'schen Hypothese

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \ll \sqrt{q} \log \log q$$

für alle $\chi \neq \chi_0 \pmod q$ nach einer Arbeit von Montgomery und Vaughan (siehe [17]).

2.2 Bombieri-Vinogradov

Dieser Satz stellt eine umfassende Betrachtung des Primzahlsatzes dar, denn hierbei wird das Maximum über alle Moduln, über alle Restklassen und alle Intervalle gebildet. Damit ergibt sich ein umfassender Fehlerterm, der in den Beweisen rund um das Goldbachsche Problem von entscheidender Bedeutung ist.

Satz 2.2 (Bombieri-Vinogradov [7]). *Sei $A > 0$ fix. Dann gilt*

$$\sum_{q\leq Q} \max_{y\leq x} \max_{(a,q)=1} \left|\psi(y;a,q) - \frac{y}{\phi(q)}\right| \ll x(\log x)^{-A} \tag{2.4}$$

für $Q = x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-B}$.

Obiges wurde für $B = 3A+23$ von Bombieri in [2] bewiesen. In unserem Fall begnügen wir uns mit $B = 16A+103$, denn dieser Beweis hat den Vorteil, dass er keinerlei Information über die Nullstellen von $L(s,\chi)$ benötigt. Er stammt von Gallagher [7].
Bevor wir mit dem Beweis beginnen, wollen wir uns davon überzeugen, dass diese Abschätzung auch etwas wert ist. Dazu bemerken wir, dass es $y/q+1$ ganze Zahlen $n \leq y$, $n \equiv a \pmod q$ gibt. Damit ist $\psi(y;a,q) \ll xq^{-1}\log x$ für $q \leq x$, $y \leq x$, sodass

$$\max_{y\leq x} \max_{(a,q)=1} \left|\psi(y;a,q) - \frac{y}{\phi(q)}\right| \ll xq^{-1}\log x$$

für $q \leq x$. Die Abschätzung

$$\sum_{q\leq Q} \max_{y\leq x} \max_{(a,q)=1} \left|\psi(y;a,q) - \frac{y}{\phi(q)}\right| \ll x(\log x)^2$$

ist trivial für $Q \leq x$.
Wir wollen noch den Satz von Bombieri-Vinogradov mit dem Primzahlsatz vergleichen. Mit Satz 2.4 erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}\sum_{q\leq Q} \max_{y\leq x} \max_{(a,q)=1} \left|\psi(y;a,q) - \frac{y}{\phi(q)}\right| &\ll x(\log x)^{-A}\\ \left|\psi(x,a,q) - \frac{x}{\phi(q)}\right| &\ll \frac{x(\log x)^{-B}}{\phi(q)}\\ \psi(x,a,q) &= \frac{x}{\phi(q)}\left(1 + \mathcal{O}\left((\log x)^{-B}\right)\right)\end{aligned}$$

für alle Restklassen $a \pmod q$ und alle $q \leq Q$.

Beweis. Sei F stückweise stetig auf $[1,\infty]$, dann führen wir die Glättung mit

$$F_0 = F \text{ und } F_{k+1}(x) = \int_1^x F_k(y)\frac{dy}{y}$$

durch. Dann ist

$$\psi_k(x;a,q) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a)\psi_k(x,\chi) \tag{2.5}$$

mit

$$\psi_k(x,\chi) = \frac{1}{k!}\sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)\log^k\left(\frac{x}{n}\right)$$

Um dies zu sehen gehen wir induktiv vor. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\psi_k(y,\chi)}{y}dy &= \int_1^x \psi_k(y,\chi)d\log y = \\ &= [\psi_k(y,\chi)\log y]_{y=1}^{y=x} - \int_1^x \log y d\psi_k(y,\chi) = \\ &= \psi_k(x,\chi)\log x - \sum_{n\le x}\log n(\psi_k(n,\chi)-\psi_k(n-1,\chi)) = \\ &= \sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)\log^{k+1}\frac{x}{n}\end{aligned}$$

Wenn χ von einem primitven Charakter χ^* induziert wird, gilt

$$\psi_k(x,\chi) = \psi_k(x,\chi^*) + \mathcal{O}(\log^{k+1} x\log q), \tag{2.6}$$

denn die Terme in beiden Summen stimmen überein, bis auf mögliche $n = p^\alpha$ mit $p \mid q$. Diese tragen aber maximal $\le \log^{k+1} x$ für jedes $p \mid q$ bei. Wenn wir die Identität $\psi_k(x,\chi_0) = \psi_k(x)$ verwenden, können wir aus (2.5) und (2.6)

$$\max_{(a,q)=1}\left|\psi_k(x;a,q) - \frac{\psi_k}{\phi(q)}\right| \ll \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\ne\chi_0}|\psi_k(x,\chi^*)| + \log^{k+1} x\log q$$

folgern. Es gilt

$$\sum_{d|q\le Q}\frac{1}{\phi(q)} \ll \sum_{d\le Q}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{e\le Q/d}\frac{1}{\phi(e)} \ll \sum_{d\le Q}\frac{\log(Q/d)+1}{\phi(d)} := \sum_{d\le Q}\varepsilon_d$$

und damit haben wir für $Q \le x^{\frac{1}{2}}$ und für k und A beschränkt,

$$\sum_{q\le Q}\max_{y\le x}\max_{(a,q)=1}\left|\psi_k(y;a,q) - \frac{\psi_k(y)}{\phi(q)}\right| \ll \sum_{1<q\le Q}\varepsilon_q\sum_{\chi}{}'\max_{y\le x}|\psi_k(y,\chi)| + x\log^{-A} x, \tag{2.7}$$

wobei die Summe über die primitiven Charaktere $\pmod q$ geht. An dieser Stelle verwenden wir den Satz von Siegel-Walfisz in der Form

$$\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)| \ll x\log^{-E} x,\ \text{für}\ \chi\ne\chi_0\ \text{und}\ q\le\log^C x,$$

mit passendem E und C. Es folgt unmittelbar, dass für beschränkte k, A und C die Terme mit $q \le \log^C x = D$ nur $\ll x\log^{-A} x$ zur rechten Seite von (2.7) beitragen.

Der Primzahlsatz liefert uns die Abschätzung für den Hauptteil. Hierzu verwenden wir die Form

$$\max_{y \le x} |\psi(y) - y| \ll x \log^{-E} x,$$

mit passendem E. Dann erhalten wir für beschränktes k, A und $Q \le x^{\frac{1}{2}}$,

$$\sum_{q \le Q} \max_{y \le x} \frac{|\psi_k(y) - y|}{\phi(q)} \ll x \log^{-A} x.$$

Daher erhalten wir für $Q \le x^{\frac{1}{2}}$ und beschränkten k, a und C, wenn wir $D := \log^C x$ setzten

$$\sum_{q \le Q} \max_{y \le x} \max_{(a,q)=1} \left| \psi_k(y; a, q) - \frac{\psi_k(y)}{\phi(q)} \right| \ll \sum_{D < q \le Q} \varepsilon_q \sum_{\chi}{}' \max_{y \le x} |\psi_k(y, \chi)| + x \log^{-A} x, \tag{2.8}$$

Sei $\alpha = 1 + \log^{-1} x$. Dann ist für $k \ge 1$

$$\psi_k(y, \chi) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{(\alpha)} \frac{y^s}{s^{k+1}} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi) \right) ds.$$

Dabei ist $\int_{(\alpha)} = \int_{\alpha - \imath\infty}^{\alpha + \imath\infty}$. Diese Überlegung folgt unmittelbar aus der Identität

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}. \tag{2.9}$$

Man multipliziert diese mit $\frac{x^s}{s^{k+1}}$ und integriert Glied für Glied. Man setzt $y = x/n$ und erhält mit Hilfe der Funktion $I(y, \infty)$ aus dem Anhang, die gewünschte Darstellung.
Jetzt folgt die zentrale Idee. Für $S = S(s, \chi)$ beschränkt und analytisch für $\sigma \ge \frac{1}{2}$ können wir schreiben:

$$\frac{L'}{L} = \frac{L'}{L}(1 - LS)^2 + (2L'S - L'LS^2).$$

Für $\chi \ne \chi_0$ ist der zweite Term analytisch und $\ll |s|$ in $\sigma \ge \beta = \frac{1}{2} + \log^{-1} x$, denn $L(s) \ll |s|^{\frac{1}{2}}$ für $\sigma \ge \frac{1}{2}$ und sei Γ der Kreis mit Radius $\log^{-1} x$ um s, dann gilt

$$L'(s) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma} \frac{L(\zeta)}{(\zeta - s)^2} d\zeta \ll |s|^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

Daher gilt für $k \ge 2$

$$\psi_k(y, \chi) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{(\alpha)} \frac{y^s}{s^{k+1}} \left(-\frac{L'}{L} \right) (1 - LS)^2 ds + \frac{1}{2\pi\imath} \int_{(\beta)} \frac{y^s}{s^{k+1}} (L'LS^2 - 2L'S) ds$$

Auf $\sigma = \alpha$ gilt $y^s \ll x$ für $y \le x$ und mit (2.9) ergibt sich

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) \ll \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\alpha} = \alpha \int_0^\infty \frac{\psi(u)}{u^{1+\alpha}} du \ll \int_1^\infty \frac{du}{u^\alpha} = \log x.$$

Für $\sigma = \beta$ haben wir $y^s \ll x^{\frac{1}{2}}$ für $y \le x$ und somit

$$\max_{y \le x} |\psi_k(y,\chi)| \ll x \log x \int_{(\alpha)} \frac{|1-LS|^2}{|s|^{k+1}} |ds| + x^{\frac{1}{2}} \int_{(\beta)} \frac{|L'LS^2| + |L'S|}{|s|^{k+1}} |ds| .$$

Es folgt für die rechte Seite von (2.8)

$$\ll x \log x \int_\alpha \frac{A(s)}{|s|^{k+1}} |ds| + x^{\frac{1}{2}} \int_\beta \frac{B(s)}{|s|^{k+1}} |ds| + x \log^{-A} x. \tag{2.11}$$

wobei

$$\begin{aligned} A(s) &= \sum_{D<q\le Q} \varepsilon_q \sum_\chi{}' |1-LS|^2 , \\ B(s) &= \sum_{D<q\le Q} \varepsilon_q \sum_\chi{}' \left(|L'LS^2| + |L'S| \right) . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nachdem wir die Funktion in zwei Teile geteilt haben, wollen wir diese nun getrennt mit dem Großen Sieb abschätzen. Hierzu verwenden wir die folgenden Ungleichungen, die für beliebige a_n und für $D \le Q/\log Q$ gelten:

$$\sum_{D<q\le Q} \varepsilon_q \sum_\chi{}' \left| \sum_{M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \ll \left(Q + \frac{N \log Q}{D} \right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 , \tag{2.13}$$

$$\sum_{q \le X} \frac{q}{\phi(q)} \sum_\chi{}' |a_n \chi(n)|^2 \ll (X^2 + N) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 . \tag{2.14}$$

Die Ungleichung (2.14) folgt unmittelbar aus Satz 1.53 und (1.51). Die Ungleichung (2.13) folgt aus (2.14) mittels partieller Summation.
Außerdem haben wir für $\sigma \ge 1$ und $H \ge 1$

$$\begin{aligned} L(s,\chi) &= \sum_{n=1}^{H} \frac{\chi(n)}{n^s} + \sum_{n=H+1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \\ &= \sum_{n=1}^{H} \frac{\chi(n)}{n^s} + \frac{1}{H^{|s|}} \sum_{n=H+1}^{\infty} \chi(n) = \\ &= \sum_{n=1}^{H} \frac{\chi(n)}{n^s} + \mathcal{O}\left(\frac{|s|\, q^{\frac{1}{2}} \log q}{H} \right) \end{aligned}$$

für $\chi \neq \chi_0$. Wir setzten

$$S(s,\chi) = \sum_{n=1}^{H} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}.$$

Dann ist für $\sigma \geq 1$ und $H \leq x$, $S(s,\chi) \ll \log H \leq \log x$ und daher für $q \leq x$

$$1 - L(s,\chi)S(s,\chi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{c(n)\chi(n)}{n^s} + \mathcal{O}\left(\frac{|s|\, q^{\frac{1}{2}} \log x}{H}\right),$$

wobei $c(1) = 0$ und für $n > 1$, $c(n) = -\sum \mu(d)$, mit d über alle Teiler von n für die $d \leq H$ und $n/d \leq H$. Daher ist $c(n) = 0$ für $n > H^2$ und für $n \leq H$ und $|c(n)| \leq d(n)$ für $H < n \leq H^2$. Wir verwenden also die Schwarz'sche Ungleichung und erhalten

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)\chi(n)}{n^s}\right|^2 = \left|\sum_{0 \leq h \ll \log x} \left(\sum_{n=2^h H+1}^{2^{h+1}H} \frac{c(n)\chi(n)}{n^s}\right)\right|^2 \ll \log x \sum_{0 \leq h \ll \log x} \left|\sum_{n=2^h H+1}^{2^{h+1}H} \frac{c(n)\chi(n)}{n^s}\right|^2.$$

Wir verwenden (2.13) mit $a_n = c(n)/n^s$, dann erhalten wir für jedes $N = 2^h H (\leq x^2)$ und $Q \leq x$,

$$\sum_{D<q\leq Q} \varepsilon_q \sum_{\chi}{}' \left|\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{c(n)\chi(n)}{n^s}\right|^2 \ll \left(Q + \frac{N \log x}{D}\right) \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\tau^2(n)}{n^2} \ll \left(\frac{Q}{N} + \frac{\log x}{D}\right) \log^3 x.$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\sum_{n\leq M} d^2(n) \ll M \log^3 M$, welches im Anhang bewiesen wird. Es folgt unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} A(s) &\ll \sum_{0<h\ll \log x} \left(\frac{Q}{2^h H} + \frac{\log x}{D}\right) \log^4 x + \sum_{D<q\leq Q} (\log(Q/q)+1) \frac{|s|^2\, q \log^4 x}{H^2} \ll \\ &\ll QH^{-1} \log^4 x + D^{-1} \log^6 x + |s|^2\, Q^2 H^{-2} \log^4 x. \end{aligned}$$

Wenn wir nun $H = QD \log^{-2} x$ setzen und voraussetzen, dass $D \geq \log x$, dann erhalten wir

$$A(s) \ll D^{-1} |s|^2 \log^6 x, \text{ für } \sigma = \alpha. \tag{2.15}$$

Um $B(s)$ abzuschätzen verwenden wir (2.14) und erhalten

$$S^2(s,\chi) = \sum_{1}^{H^2} \frac{f(n)\chi(n)}{n^s}, \text{ mit } |f(n)| \leq d(n).$$

Damit haben wir für $\sigma \geq \frac{1}{2}$

$$\sum_{q\leq X} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}' |S(s,\chi)|^4 \ll (X^2 + H^2) \sum_{1}^{H^2} \frac{\tau^2(n)}{n^s} \ll (X^2 + H^2) \log^4 x. \tag{2.16}$$

Mit dem Argument aus [6],Satz 4 erhalten wir aus (2.14)

$$\sum_{q\le X}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}' |L(s,\chi)|^4 \ll X^2 |s|^2 \log^4(X|s|+2) \text{ für } \sigma \ge \frac{1}{2}. \tag{2.17}$$

Mittels Hölders Ungleichung ergibt (2.10)

$$|L'(s,\chi)|^4 \ll \log^5 x \int_\Gamma |L(\zeta,\chi)|^4 |d\zeta| .$$

Daher gilt für $\sigma = \beta$

$$\sum_{q\le X}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}' |L'(s,\chi)|^4 \ll X^2 |s|^2 \log^4(X|s|+2)\log^4 x. \tag{2.18}$$

Die Schwarz'sche Ungleichung mehrere Male angewendet liefert uns

$$\begin{aligned}\sum_{q\le X}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}'(|L'LS^2|+|L'S|) &\ll \sum_{q\le X}\frac{q}{\phi(q)}\left(\sum_{\chi}{}' |L'L|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi}{}' |S|^4\right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ &\ll \sum_{q\le X}\frac{q}{\phi(q)}\left(\sum_{\chi}{}' |L'|^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{\chi}{}' |L|^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{\chi}{}' |S|^4\right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ &\ll (X+H)\log^2 x \cdot X|s|\log x \cdot \log^2(X|s|+2).\end{aligned}$$

Durch partielle Summation und $H = DQ\log^{-2} x$ folgt, dass

$$B(s) \ll DQ\log^5 x\,|s|\log^2(|s|+2), \text{ für } \sigma = \beta. \tag{2.19}$$

Nachdem wir nun die beiden Teile abgeschätzt haben, müssen wir sie noch geeignet zusammenfügen, dabei verwenden wir die ψ_k auf geeignete Weise. Von (2.11), (2.15) und (2.19) haben wir für die rechte Seite von (2.8)

$$\ll x\log x\int_{(\alpha)}\frac{D^{-1}|s|^2\log^6 x}{|s|^{k+1}}|ds| + x^{\frac{1}{2}}\int_{(\beta)}\frac{DQ\log^5 x\,|s|\log^2(|s|+2)}{|s|^{k+1}}|ds| + x\log^{-A} x.$$

Für $k = 3$ entspricht das

$$\ll xD^{-1}\log^7 x + x^{\frac{1}{2}}DQ\log^5 x + x\log^{-A} .$$

Wir setzen nun $D = (\log x)^{A+7}$ und $Q = x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-(2A+12)}$, dann erhalten wir

$$\sum_{q\le Q}\max_{y\le x}\max_{(a,q)=1}\left|\psi_3(y;a,q) - \frac{y}{\phi(q)}\right| \ll x(\log x)^{-A} \tag{2.20}$$

Wir müssen nun noch (2.4) aus (2.20) ableiten. Nachdem $\psi_k(y;a,q)$ eine wachsende Funktion in y ist, erhalten wir für $0<\lambda\le 1$,

$$\frac{1}{\lambda}\int_{e^{-\lambda}y}^{y}\psi_{k-1}(z;a,q)\frac{dz}{z}\le \psi_{k-1}(y;a,q)\le \frac{1}{\lambda}\int_{y}^{e^{\lambda}y}\psi_{k-1}(z;a,q)\frac{dz}{z}.$$

Dabei entsprechen die Integrale

$$\psi_k(y;a,q)-\psi_k(e^{-\lambda}y;a,q) \text{ und } \psi_k(e^{\lambda}y;a,q)-\psi_k(y;a,q)$$

Wir setzen

$$\psi_k(x;a,q)=\frac{x}{\psi(q)}+r_k(x;a,q),$$

dann sind die Integrale

$$(\lambda+\mathcal{O}(\lambda^2))\frac{y}{\phi(q)}+\mathcal{O}\left(\max_{y\le ex}|r_k(y;a,q)|\right).$$

Daher gilt

$$\max_{y\le x}|r_{k-1}(y;a,q)|\ll\frac{\lambda x}{\phi(q)}+\frac{1}{\lambda}\max_{y\le ex}|r_k(y;a,q)|,$$

und somit für $Q\le x$,

$$\sum_{q\le Q}\max_{y\le x}\max_{(a,q)=1}|r_{k-1}(y;a,q)|\ll\lambda x\log x+\lambda^{-1}\sum_{q\le Q}\max_{y\le ex}\max_{(a,q)=1}|r_k(y;a,q)|.$$

Wir schließen nun rekursiv indem wir bei $k=3$ starten. Dann ist die rechte Seite

$$\begin{aligned}&\ll\lambda x\log x+\lambda^{-1}x\log^{-A}x, &&\text{für } Q\le x^{\frac12}\log^{B_k(A)}x\\ &\ll x\log^{-\frac12(A-1)}x, &&\text{wenn wir } \lambda=\log^{-\frac12(A+1)} \text{ setzten.}\end{aligned}$$

Damit gilt offensichtlich $B_{k-1}(A)=B_k(2A-1)$ und somit, wenn wir bei $B_3(A)=2A+12$ starten, $B_0(A)=16A+26$. $\square$

Kapitel 3

Der Satz von Šnirelman-Goldbach

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass die Primzahlen ein endliche Basis bilden. Was das genau heißt, wird noch klar werden, zuerst ein paar Definitionen

3.1 Die Šnirelman-Dichte

Sei $\mathcal{A}$ im ganzen Abschnitt eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Für jede reelle Zahl x schreiben wir $A(x)$ und meinen

$$A(x) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a \leq x}} 1$$

Dabei wird $A(x)$ auch die Anzahlfunktion von $\mathcal{A}$ genannt. Für $x > 0$ gilt

$$0 \leq A(x) \leq [x] \leq x$$

und damit gilt

$$0 \leq \frac{A(x)}{x} \leq 1$$

Diese Beobachtung ist Motivation für die folgende Definition

Definition 3.1.1. Sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen und

$$\sigma(\mathcal{A}) = \inf_n \frac{A(n)}{n},$$

dann nennen wir $\sigma(\mathcal{A})$ die *Šnirelman-Dichte* von $\mathcal{A}$.

Dann ist klarerweise $0 \leq \sigma(\mathcal{A}) \leq 1$ und für $\sigma(\mathcal{A}) = s$ gilt $A(n) \geq sn$ für alle n. Wir werden gleich sehen, wieso diese Wahl so gut ist. Wenn $1 \notin \mathcal{A}$, dann ist $A(1) = 0$ und somit $\sigma(\mathcal{A}) = 0$. Für $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ gilt $A(n) = n$ und somit $\sigma(\mathcal{A}) = 1$. Angenommen, es existiert ein $m \notin \mathcal{A}$ für $m \geq 1$, dann ist $A(m) = m - 1$ und somit

$$\sigma(\mathcal{A}) \leq \frac{A(m)}{m} \leq 1 - \frac{1}{m} < 1.$$

Daraus folgt

$$\sigma(\mathcal{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathbb{N}$$

Definition 3.1.2. Seien $\mathcal{A}_1$,$\mathcal{A}_2$,...,$\mathcal{A}_h$ Teilmengen der natürlichen Zahlen, dann verstehen wir unter

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_h = \sum_{i=1}^{h} \mathcal{A}_i$$

die Menge aller s, für die es $a_i \in \mathcal{A}_i$ gibt mit

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_h = \sum_{i=1}^{h} a_i$$

Die $\mathcal{A}_i$ heißen auch Summanden von $\mathcal{S}$

Wir führen die folgende verkürzende Schreibweise ein:

$$h\mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{A} + \cdots + \mathcal{A}}_{\text{h-mal}}$$

Definition 3.1.3. Wir nennen $\mathcal{A}$ eine Basis h-ter Ordnung, wenn

$$h\mathcal{A} = \mathbb{N}$$

Damit ist nach oben völlig gleichbedeutenden, dass

$$\sigma(h\mathcal{A}) = 1$$

Damit konnte Šnirelman zeigen, dass jede Teilmenge der natürlichen Zahlen, die 0 enthält und positive Šnirelman-Dichte besitzt, eine Basis h-ter Ordnung ist.

Lemma 3.1.1. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen, mit $0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Ist $n \geq 0$ und $A(n) + B(n) \geq n$, dann gilt*

$$n \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

Beweis. Ist $n \in \mathcal{A}$, dann gilt $n + 0 \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$ und somit $n \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Selbiges für $n \in \mathcal{B}$. Deswegen nehmen wir an, dass $n \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Wir definieren uns Mengen

$$\mathcal{A}' = \{n - a : a \in \mathcal{A}, 1 \leq a \leq n - 1\}$$

und

$$\mathcal{B}' = \{b : b \in \mathcal{B}, 1 \leq b \leq n - 1\} .$$

Dann ist $|\mathcal{A}'| = A(n)$, denn $n \notin \mathcal{A}$, und $|\mathcal{B}'| = B(n)$ wegen $n \notin \mathcal{B}$. Außerdem ist

$$\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}' \subset [1, n - 1].$$

Nachdem aber

$$|\mathcal{A}'| + |\mathcal{B}'| = A(n) + B(n) \geq n$$

folgt mittels Schubfachschluss, dass

$$\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset.$$

Damit gibt es ein $n - a = b$ für $a \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$ und somit $n = a + b \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$ im Widerspruch zur Annahme. □

Lemma 3.1.2. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen, mit $0 \in \mathcal{A}$ und $0 \in \mathcal{B}$. Wenn $\sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B}) \geq 1$, dann gilt $n \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$ für jede natürliche Zahl n.*

Beweis. Sei $\sigma(\mathcal{A}) = \alpha$ und $\sigma(\mathcal{B}) = \beta$. Für $n \geq 0$ ist dann

$$A(n) + B(n) \geq (\alpha + \beta)n \geq n$$

und mit Lemma 3.1.2 folgt $n \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$. □

Lemma 3.1.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit $0 \in \mathcal{A}$ und $\sigma(\mathcal{A}) \geq 1/2$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine Basis der Ordnung 2.*

Beweis. Dieses Lemma folgt aus Lemma 3.1.2 für $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. □

Satz 3.1 (Šnirelman [18])**.** *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen, mit $0 \in \mathcal{A}$ und $0 \in \mathcal{B}$. Sei $\sigma(\mathcal{A}) = \alpha$ und $\sigma(\mathcal{B}) = \beta$. Dann gilt*

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \geq \alpha + \beta - \alpha\beta. \tag{3.1}$$

Beweis. Sei $n \geq 1$ und $a_0 = 0$. Dann können wir oBdA die Elemente sortieren, sodass

$$1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq n$$

und $k = A(n)$. Da aus $0 \in \mathcal{B}$ folgt, dass $a_i = a_i + 0 \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Sei dann

$$1 \leq b_1 < \cdots < b_{r_i} \leq a_{i+1} - a_i - 1$$

und $r_i = B(a_{i+1} - a_i - 1)$. Dann gilt offenbar

$$a_i < a_i + b_1 < \cdots < a_i + b_{r_i} < a_{i+1}$$

und

$$a_i + b_j \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

Sei weiters

$$1 \leq b_1 < \cdots < b_{r_k} \leq n - a_k$$

mit $r_k = B(n - a_k)$. Dann gilt

$$a_k < a_k + b_1 < \cdots < a_k + b_{r_k} \leq n$$

und

$$a_i + b_j \in \mathcal{A} + \mathcal{B}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} + \mathcal{B})(n) &\geq A(n) + \sum_{i=0}^{k-1} B(a_{i+1} - a_i - 1) + B(n - a_k) \geq \\
&\geq A(n) + \beta \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i - 1) + \beta(n - a_k) = \\
&= A(n) + \beta n - \beta k = \\
&= A(n) + \beta n - \beta A(n) \geq \\
&\geq (1 - \beta)\alpha n + \beta n = \\
&= (\alpha + \beta - \alpha\beta) n
\end{aligned}$$

und damit

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \inf_n \frac{(\mathcal{A} + \mathcal{B})(n)}{n} \geq \alpha + \beta - \alpha\beta.$$

□

Wir können die Ungleichung (3.1) umformen und erhalten

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) &\geq \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B}) - \sigma(\mathcal{A})\sigma(\mathcal{B}) \\
\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - 1 &\geq -(1 - \sigma(\mathcal{A}))(1 - \sigma(\mathcal{B})) \\
1 - \sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) &\leq (1 - \sigma(\mathcal{A}))(1 - \sigma(\mathcal{B}))
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Diese Form gibt uns folgenden Satz:

Satz 3.2. *Seien $h \geq 1$ und $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_h$ Teilmengen der natürlichen Zahlen mit $0 \in \mathcal{A}_i$ für alle i. Dann gilt*

$$1 - \sigma(\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_h) \leq \prod_{i=1}^{h} (1 - \sigma(\mathcal{A}_i)).$$

Beweis. Wir zeigen dies mittels vollständiger Induktion nach h. Für $h = 1$ ist nichts zu zeigen und für $h = 2$ folgt der Satz aus (3.2).
Sei also $h \geq 3$ und wir setzen voraus, dass die Bedingung für $h - 1$ Teilmengen stimmt. Dann folgt

$$\begin{aligned} 1 - \sigma(\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_h) &= 1 - \sigma(\mathcal{A}_1 + (\mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_h)) \leq \\ &\leq (1 - \sigma(\mathcal{A}_1))(1 - \sigma(\mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_h) \leq \\ &\leq (1 - \sigma(\mathcal{A}_1)) \prod_{i=2}^{h} (1 - \sigma(\mathcal{A}_i)) = \\ &= \prod_{i=1}^{h} (1 - \sigma(\mathcal{A}_i)). \end{aligned}$$

□

Es folgt der zuvor angekündigte Satz von Šnirelman.

Satz 3.3 (Šnirelman [18])**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit $0 \in \mathcal{A}$ und $\sigma(\mathcal{A}) > 0$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine Basis endlicher Ordnung.*

Beweis. Sei $\sigma(\mathcal{A}) = \alpha$. Dann ist $0 \leq 1 - \alpha < 1$ und damit gibt es ein $l \geq 1$ mit

$$0 \leq (1 - \alpha)^l \leq 1/2$$

Mittels Satz 3.2 erhalten wir

$$1 - \sigma(l\mathcal{A}) \leq (1 - \sigma(\mathcal{A}))^l = (1 - \alpha)^l \leq 1/2,$$

und damit

$$\sigma(l\mathcal{A}) \geq 1/2.$$

Sei nun $h = 2l$, dann folgt mit Lemma 3.1.3, dass $\mathcal{A}$ eine Basis h-ter Ordnung ist. □

3.2 Der Satz von Šnirelman-Goldbach

Wir sind nun in der Lage den Satz von Šnirelman-Goldbach zu zeigen, doch zuerst einige Lemmata.

Lemma 3.2.1. *Sei $r(N)$ die Anzahl der Darstellungen von N als Summe zweier Primzahlen. Dann gilt*

$$\sum_{N \le x} r(N) \gg \frac{x^2}{(\log x)^2}.$$

Beweis. Seien p und q Primzahlen mit $p, q \le x/2$, dann ist $p + q \le x$. Deshalb gilt

$$\sum_{N \le x} r(N) \ge \pi(x/2)^2 \gg \frac{(x/2)^2}{(\log(x/2))^2} \gg \frac{x^2}{(\log x)^2}.$$

□

Lemma 3.2.2. *Sei $r(N)$ die Anzahl der Darstellungen von N als Summe zweier Primzahlen. Dann gilt*

$$\sum_{N \le x} r(N)^2 \ll \frac{x^3}{(\log x)^4}.$$

Beweis. Aus Satz 1.7 wissen wir, dass

$$r(N) \ll \frac{N}{(\log N)^2} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \le \frac{N}{(\log N)^2} \sum_{d|N} \frac{1}{d}.$$

Diese Ungleichung gilt auch für ungerade N, dann muss $N-2$ prim sein und somit $r(N) = 2$. Wir verwenden im folgenden die Ungleichung

$$[d_1, d_2] = \frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)} \ge (d_1 d_2)^{1/2}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{N \le x} r(N)^2 &\ll \sum_{N \le x} \frac{N^2}{(\log N)^4} \left(\sum_{d|N} \frac{1}{d} \right)^2 \ll \\
&\ll \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{N \le x} \left(\sum_{d|N} \frac{1}{d} \right)^2 \le \\
&\le \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{N \le x} \sum_{d_1|N} \sum_{d_2|N} \frac{1}{d_1 d_2} \le \\
&\le \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{d_1|N} \sum_{d_2|N} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\substack{N \le x \\ [d_1, d_2]}} \le
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{d_1|N} \sum_{d_2|N} \frac{1}{d_1 d_2} \frac{x}{[d_1, d_2]} \leq$$
$$\leq \frac{x^3}{(\log x)^4} \left(\sum_{d|N} \frac{1}{d^{3/2}} \right)^2 \ll$$
$$\ll \frac{x^3}{(\log x)^4}$$

□

Satz 3.4. *Die Menge*

$$\mathcal{A} = \{0, 1\} \cup \{p + q : p, q \text{ prim}\}$$

hat positive Šnirelman-Dichte.

Beweis. Sei $r(N)$ die Anzahl der Darstellungen von N als eine Summe von zwei Primzahlen. Dann gilt mit Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{N \leq x} r(N) \right)^2 \leq \sum_{\substack{N \leq x \\ r(N) \geq 1}} 1 \sum_{N \leq x} r(N)^2 \leq A(x) \sum_{N \leq x} r(N)^2.$$

Mit Lemma 3.2.1 und 3.2.2 folgt

$$\frac{A(x)}{x} \geq \frac{1}{x} \left(\frac{\sum_{N \leq x} r(N)}{\sum_{N \leq x} r(N)^2} \right) \gg \frac{1}{x} \frac{\frac{x^4}{(\log x)^4}}{\frac{x^3}{(\log x)^4}} \gg 1.$$

□

Satz 3.5 (Šnirelman-Goldbach [18])**.** *Jede natürliche Zahl größer als 1 ist als Summe einer begrenzten Anzahl von Primzahlen darstellbar.*

Beweis. Wir haben gezeigt, dass

$$\mathcal{A} = \{0, 1\} \cup \{p + q : p, q \text{ prim}\}$$

positive Šnirelman-Dichte hat und somit gibt es ein h, sodass jede natürliche Zahl als Summe von h Elementen aus A geschrieben werden kann. Da zur Menge $\mathcal{A}$ auch die 1 gehört, müssen wir nur zeigen, dass sich die 1en geeignet zu 2ern und 3ern gruppieren lassen. Sei also $N \geq 2$, dann ist $N - 2 \geq 0$ und es gibt ganze k und l mit $k + l \leq h$ und l Paaren (p_i, q_i), sodass

$$N - 2 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k\text{-mal}} + (p_1 + q_1) + \cdots + (p_l + q_l).$$

Sei $k = 2m + r$, dann unterscheiden wir die Fälle $r = 0$ und $r = 1$.
Sei $r = 0$, dann ist

$$N = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{m+1\text{-mal}} + (p_1 + q_1) + \cdots + (p_l + q_l).$$

Für $r = 1$ können wir N schreiben als

$$N = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{m\text{-mal}} + 3 + (p_1 + q_1) + \cdots + (p_l + q_l).$$

Damit ist N immer die Summe von

$$2l + m + 1 \leq 3h$$

Primzahlen und daraus folgt der Satz. □

Wir wissen nun, dass die Primzahlen eine endliche Basis bilden. Damit ergibt sich eine andere Formulierung für das Goldbachsche Problem.

Definition 3.2.1. Die Šnirelman Zahl ist die Anzahl der Primzahlen die man maximal benötigt, um jede natürliche Zahl größer 1 als Summe dieser darzustellen.

Damit können wir das Goldbachsche Problem beschreiben als die Vermutung, dass die Šnirelman Zahl gleich 3 ist. Die kleinste bis jetzt bekannte Šnirelman Konstante ist 7 und folgt aus dem Satz von Ramaré (Satz 4.1).

3.3 Satz von Mann-Dyson

Für unseren späteren Beweis der Šnirelman Zahl 7 wird der Satz von Snirelman (Satz 3.1) nicht ausreichen. Wir brauchen hier bessere Abschätzungen für die Dichte von Summen von Mengen. Deswegen wollen wir in diesem Abschnitt den Satz von Mann und seine Verallgemeinerung den Satz von Dyson kennenlernen.

Satz 3.6 (Mann)**.** *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen und $0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Dann gilt*

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \geq \min(1, \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B})).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, möchten wir ihn aus einem anderen Blickwinkel betrachten. Der erste Beweis des Satzes war sehr kompliziert und wurde auch in seiner zweiten Fassung von Artin und Scherk nicht wesentlich vereinfacht. Erst Dyson gab einen einfacheren Beweis und konnte auch eine Verallgemeinerung des Satzes machen.

Satz 3.7 (Dyson)**.** *Seien $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_k$ Teilmengen der natürlichen Zahlen mit $0 \in \bigcap_{r=0}^{k} \mathcal{A}_r$. Dann gilt*

$$\sigma\left(\sum_{r=0}^{k} \mathcal{A}_k\right) \geq \min\left(1, \sum_{r=0}^{k} \sigma(\mathcal{A}_k)\right).$$

Man erkennt sofort, dass der Satz 3.6 einen Spezialfall für $k = 1$ darstellt.
Wir wollen nun die Dyson-Transformation beweisen. Sie stellt die zentrale Beweisidee für beide Sätze dar.

Lemma 3.3.1 (Dyson Transformation)**.** *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Teilmengen der natürlichen Zahlen mit $0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Für ein e in $\mathcal{A}$ definieren wir*

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} + e) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap (\mathcal{A} - e).$$

Dann gilt

1. $\mathcal{A}' + \mathcal{B}' \subset \mathcal{A} + \mathcal{B}$
2. $e + \mathcal{B}' \subset \mathcal{A}'$
3. $0 \in \mathcal{B}'$
4. $A'(m) + B'(m - e) = A(m) + B(m - e)$

Beweis. Für den Beweis zeigen wir jede Eigenschaft einzeln.

1. Es genügt zu zeigen, dass $(\mathcal{B} + e) + \mathcal{B}' \subset \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Hierzu schreiben wir

$$(b + e) + b' = b + (e + b') = b + (e + (a - e)) = b + a.$$

2. Sei $b' \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{A} - e$, dann können wir schreiben

$$e + b' = e + (a - e) = a.$$

   Daraus folgt $e + b' \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

3. Nach Voraussetzung ist $e \in \mathcal{A}$. Dann ist $0 \in \mathcal{A} - e$ und daraus folgt $0 \in \mathcal{B}'$.

4. Wir wählen m fix und erhalten dann, wenn wir $\mathcal{A}$ wie oben aufteilen, dass

$$\begin{aligned} A'(m) &= A(m) + B(m - e) - (A \cap (B + e))(m - e) \\ &= A(m) + B(m - e) - (B \cap (A - e))(m - e) \\ &= A(m) + B(m - e) - B'(m - e) \end{aligned}$$

□

Diese Transformationsidee geht auf Dyson zurück, der sie dazu verwendete den Satz von Mann und seine Verallgemeinerung zu beweisen. Doch bevor wir dies tun, möchte ich noch die starke Vereinigung definieren.

Definition 3.3.1. Die starke Vereinigung

$$\bigvee_{r=0}^{k} \mathcal{A}_r$$

von $k+1$ Teilmengen der natürlichen Zahlen ist definiert als die Summe der Anzahl aller Elemente von $\sum_{r=0}^{k} \mathcal{A}_r$ mit Mehrfachheit. Die 0 ist eine Ausnahme, da sie in allen Mengen vorkommt, aber nur einfach gezählt wird.

Um diese Definition etwas anschaulicher darzustellen, wollen wir eine weitere geben und dann ein Beispiel.

Definition 3.3.2. Seien $0 < m \leq n$ natürliche Zahlen und $\mathcal{V}$ eine starke Vereinigung von Teilmengen. Dann schreiben wir $V(m,n)$ für die Anzahl der Elemente von V die im Intervall $[m,n]$ liegen. Abkürzend schreiben wir $V(n)$ für $V(1,n)$.

Beispiel: Wir setzen

$$\mathcal{V} = \bigvee_{r=0}^{k} \mathcal{A}_r.$$

Seien $0 < m \leq n$ natürliche Zahlen, dann gilt

$$V(m,n) = \sum_{r=0}^{k} A_r(m,n)$$

und

$$V(m) = \sum_{r=0}^{k} A_r(m). \tag{3.3}$$

Mit der folgenden Definition können wir die Sätze von Mann und Dyson auf ihre wesentlichen Teile vereinfachen

Definition 3.3.3. Wir sagen das Intervall “$[m,n]$ ist $\mathcal{V}$-gut bezüglich η”, wenn

$$V(m,n) \geq \eta(n-m+1) \tag{3.4}$$

erfüllt ist.

Diese Eigenschaft ist additiv im folgenden Sinne: Wenn $[l, m]$ und $[m + 1, n]$ diese Eigenschaft besitzen, dann auch $[l, n]$.
Wir können nun den Satz von Mann wie folgt ausdrücken

Satz 3.8. *Sei $0 < \eta \leq 1$ und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Teilmengen der natürlichen Zahlen mit $0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ und $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})/[1, n] = \emptyset$. Wenn*

$$[1, m]\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B}\text{-gut bezüglich } \eta \text{ für } m = 1, 2, \ldots n \tag{3.5}$$

ist, dann ist

$$[1, m]\ \mathcal{A} + \mathcal{B}\text{-gut bezüglich } \eta \text{ für } m = 1, 2, \ldots n, \tag{3.6}$$

Mit der starken Vereinigung wird auch der Satz von Dyson eindeutiger:

Satz 3.9. *Sei $k \geq 1$ ganz, $0 < \eta \leq 1$ und sei n eine natürliche Zahl. Seien $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ $k + 1$ Teilmengen, jede mit 0 und komplett im Intervall $[0, n]$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{V}$ und $\mathcal{S}$ ihre starke Vereinigung beziehungsweise ihre Summe. Wenn nun*

$$[1, m]\ \mathcal{V}\text{-gut bezüglich } \eta, \text{ für } m = 1, 2, \ldots, n \tag{3.7}$$

ist, dann ist

$$[1, m]\ \mathcal{S}\text{-gut bezüglich } \eta, \text{ für } m = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Beweis. Der Beweis stammt aus [10] für Satz 1.9. Die Beweisidee ist recht einfach und beruht darauf, dass wir induktiv vorgehen für k. Sei nun k das kleinste, für das es η und n gibt, sodass (3.7) richtig, aber (3.8) falsch ist. Als nächstes wählen wir η und n so, dass der Satz falsch ist. Um einen Widerspruch zu erzwingen, wählen wir die $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ so, dass die Anzahl $A_k(0, n)$ minimal ist.
An dieser Stelle wollen wir nun η fix wählen für den ganzen restlichen Beweis.
Wir konstruieren uns nun Mengen $\mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_k$, mit folgenden Eigenschaften:

1. $[1, m]$ ist $\mathcal{V}$-gut für $m = 1, \ldots, n$,
2. $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ und
3. $A'_k(0, n) < A_k(0, n)$

Wir folgern nun aus 1. und 2., dass (3.7) gilt, und 3. gereicht uns dann zum Widerspruch zur Minimalität von $\mathcal{A}_k$. Wir setzen $\mathcal{A}_k = \mathcal{B}$ und $\mathcal{V}_1$ die starke Vereinigung von $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots \mathcal{A}_{k-1}$, sodass

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \vee \mathcal{B} \tag{3.9}$$

gilt. Für jedes $s = 0, 1, \ldots, k - 1$ sei a_s^* das kleinste Element von $\mathcal{A}_s$, sodass

$$a_s + \mathcal{B} \text{ ist nicht ganz in } \mathcal{A}_s. \tag{3.10}$$

Es ist klar, dass a_s^* existiert, denn das größte Element von $\mathcal{A}_s + \mathcal{B}$ ist sicherlich nicht in $\mathcal{A}_s$. Wir setzen nun

$$a^* = \min(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_{k-1}^*) \tag{3.11}$$

und bemerken für $a^* > 0$, dass wenn r die Bedingung

$$0 \leq r < a^* \tag{3.12}$$

erfüllt, dann gilt

I $b + (\mathcal{A}_s \cap [0, r]) \subset \mathcal{A}_s$ für $s = 0, 1, \ldots, k-1$ und alle $b \in \mathcal{B}$ und speziell

II wenn $[0, r]$ $\mathcal{V}$-gut ist, dann auch $[b, b + r]$ für jedes $b \in \mathcal{B}$.

Nach (3.11) liegt a^* in zumindest einem der $\mathcal{A}_s$, sei t das kleinste s, sodass gilt

$$0 \leq t \leq k-1, \quad a^* \in \mathcal{A}_t. \tag{3.13}$$

Wir wollen nun die Dyson-Transformation (Lemma 3.3.1) mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_t$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}_k$ und $e = a^*$ anwenden. Alle übrigen Mengen bleiben unverändert. Wir können dies abkürzend wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t' &= \mathcal{A}_t \cup (a^* + \mathcal{B}), \quad \mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap (\mathcal{A}_t - a^*), \\ \mathcal{A}_s' &= \mathcal{A}_s \ (s = 0, 1, \ldots, t-1, t+1, \ldots, k-1). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Es genügt nun, die drei Eigenschaften nachzuweisen. Die Menge $\mathcal{B}'$ hat sicher die Eigenschaft 3., da zumindest ein Element entfernt wurde. 2. folgt aus dem Lemma 3.3.1. Es bleibt noch Eigenschaft 1. zu zeigen.
Wenn nun $a^* = 0$, dann ist $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$ und Eigenschaft 1. und (3.7) sind gleich.
Sei nun $a^* > 0$. In diesem Fall unterscheiden sich $\mathcal{V}'$ und $\mathcal{V}$ um die Elemente, die aus $\mathcal{B}$ entfernt wurden. Diese wurden um a^* verschoben und liegen außerhalb von $[0, n]$.
Betrachten wir nun 1. für ein spezielles m, dann führt die Verschiebung um a^* dazu, dass alle Elemente, die aus dem Intervall $[m - a^* + 1, m]$ herausfallen, entfernt werden. Deshalb genügt es für 1. zu zeigen, dass für jedes m das Intervall $[1, m]$ $\mathcal{V}$-gut bleibt.
Sei nun b_1 das kleinste Element von $\mathcal{B}$ im Intervall $[m - a^* + 1, m]$. Wenn es kein solches gibt, sind wir fertig. Wir schreiben nun $m = b_1 + r$, sodass r die Bedingung (3.12) erfüllt. Das Intervall $[1, b_1 - 1]$ ist $\mathcal{V}$-gut, sodass es genügt zu zeigen, dass $[b_1, m] = [b_1, b_1 + r]$ $\mathcal{V}_1$-gut ist (Das ist nach (3.9) equivalent mit $\mathcal{V}$-gut.). Nun ist aber $[0, r]$ $\mathcal{V}_1$-gut nach dem nachfolgenden Lemma 3.3.2 und somit ist $[b_1, b_1 + r]$ $\mathcal{V}_1$-gut nach (II).
Damit erfüllt es Eigenschaft 1. und der Widerspruch ist erbracht. □

Lemma 3.3.2. *Wenn $a^* > 0$, dann ist für jedes r, das (3.12) erfüllt, das Intervall $[0, r]$ $\mathcal{V}_1$-gut.*

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe ein r, das (3.12) erfüllt, für welches aber $[0, r]$ nicht $\mathcal{V}_1$-gut ist. Sei r^* das kleinste solche r. Nachdem $0 \in \mathcal{V}_1$ und $\eta \leq 1$, muss $r^* \geq 1$ sein und $[1, r^*]$ kann nicht $\mathcal{V}_1$-gut sein. Aber mit (3.7) ist $[1, r^*]$ $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \vee \mathcal{B}$-gut und damit muss $[1, r^*]$ ein positives Element b_0 aus $\mathcal{B}$ besitzen. Nun ist aber nach Definition von r^* das Intervall $[0, b_0 - 1]$ V_1-gut, während dies für $[0, r^*]$ nicht gilt. Daher kann $[b_0, r^*]$ nicht $\mathcal{V}_1$-gut sein und mit (II) auch das Intervall $[0, r^* - b_0]$. Da b_0 positiv ist, ist dies ein Widerspruch zur Minimalität von r^*. □

3.4 Satz von Ostmann

Als Krönung unserer Ausführungen über die additive Zahlentheorie möchte ich an dieser Stelle den Satz von Ostmann anbringen. Dieser wird uns beim Beweis für die Šnirelman Zahl 7 von großer Hilfe sein. Ich möchte ihn in einer Version von J.-M. Deshouillers zeigen.

Satz 3.10 ([20], Satz 9.1). *Sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit 0. Sei σ eine reelle Zahl und H, K und n_0 ganz, sodass*

- *für $n \geq n_0$ gilt $A(n) \geq \sigma n + \frac{K(K+1)}{2}(H-1)$,*
- *$\{0, 1, \ldots, K\} \in \mathcal{A}$, und $\{n_0, n_0 + 1, \ldots, n_0 + K\} \in \mathcal{A}$,*
- *$(K+1)h\sigma \geq K + H$.*

Dann ist jede ganze Zahl $\geq hn_0$ als Summe von maximal h Elementen von $\mathcal{A}$ darstellbar.

Der Beweis verwendet ebenfalls die Dyson-Transformation, die wir im Abschnitt zuvor bereits kennengelernt und angewendet haben.

Beweis. Wir definieren rekursiv $\mathcal{A}_h^l$ für $1 \leq l \leq K(H-1)$ und $1 \leq l \leq h$. Dabei starten wir mit

$$\mathcal{A}_h^1 = \mathcal{A} \text{ für } 1 \leq h \leq H.$$

Seien $(\mathcal{A}_h^{l-1})_{1 \leq l \leq H}$ bereits definiert für ein $l \leq K(H-1)$. Wir schreiben $l = (k-1)(h-1)+r$ mit $1 \leq r \leq H-1$ und $1 \leq k \leq K$ und definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^l &= \mathcal{A}_1^{l-1} \cup (\mathcal{A}_{r+1}^{l-1} + k), \\ \mathcal{A}_{r+1}^l &= \mathcal{A}_{r+1}^{l-1} \cap (\mathcal{A}_1^{l-1} - k), \\ \mathcal{A}_s^l &= \mathcal{A}_s^{l-1} \text{ für } s \neq 1 \text{ und } s \neq r+1. \end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften der Dyson Transformation (Lemma 3.3.1) erhalten wir:

1. $\mathcal{A}_1^l + \cdots + \mathcal{A}_H^l \subset \mathcal{A}_1^{l-1} + \cdots + \mathcal{A}_H^{l-1}$
2. $\begin{cases} \{0, 1, \ldots k-1\} + \mathcal{A}_s^l \subset \mathcal{A}_1^l \text{ für } r+1 < s \\ \{0, 1, \ldots, k\} + \mathcal{A}_s^l \subset \mathcal{A}_1^l \text{ für } s \leq r+1 \end{cases}$

3. $A_1^l(m) + A_{r+1}^l(m-k) = A_1^{l-1}(m) + A_{r+1}^{l-1}(m-k)$, $\forall m \geq 0$
4. $\{0, n_0\} \subset \mathcal{A}_1^l \cap \cdots \cap \mathcal{A}_H^l, \{n_0, n_0+1, \ldots, n_0+K\} \subset \mathcal{A}_1^l$

Aus 3. folgern wir

$$\mathcal{A}_1^l(m) + \cdots + \mathcal{A}_H^l(m) \geq \mathcal{A}_1^{l-1} + \cdots + \mathcal{A}_H^{l-1}(m) - k.$$

Schließlich definieren wir $\mathcal{B}_h = \mathcal{A}_h^{K(H-1)}$, für $1 \leq h \leq H$. Wir haben dann

$$\mathcal{B}_1 + \cdots + \mathcal{B}_H \subset H\mathcal{A} \tag{3.15}$$

$$\{0, 1, \ldots, K\} + (\mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_H) \subset \mathcal{B}_1 \tag{3.16}$$

$$\text{Für } n \geq n_0 \text{ gilt } B_1(n) + \cdots + B_H(n) \geq \frac{K+H}{K+1} n \tag{3.17}$$

$$\{0, n_0\} \subset \mathcal{B}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{B}_H. \tag{3.18}$$

Sei n_1 nun das kleinste n für die die Ungleichung (3.17) gilt. Sollte sie immer gelten, dann setzten wir $n_1 = 1$. Wegen (3.16) ist $n_1 \in \mathcal{B}_1$ und für $n \geq n_1$ gilt

$$B_1(n_1, n) + \cdots + B_H(n_1, n) \geq \frac{K+H}{K+1}(n - n_1 + 1). \tag{3.19}$$

Für $h = 2, \ldots H$ definieren wir n_h rekursiv als die kleinste ganze Zahl in $\mathcal{B}_h$ die größer gleich n_1 ist. OBdA erhalten wir $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_H$ und wegen (3.18) gilt $n_H \leq n_0$. Wir definieren nun

$$\mathcal{A}_h = \mathcal{B}_h - n_h \text{ für } h = 1, 2, \ldots, H.$$

Es gilt dann

$$\sum_{h=1}^H \mathcal{A}_h = \sum_{h=1}^H \mathcal{B}_h - \sum_{h=1}^H n_h \text{ mit } \sum_{h=1}^H n_h \leq H n_0 \tag{3.20}$$

und die Anzahlfunktion genügt

$$A_h(n) = B_h(1 + n_h, n + n_h) = B_h(n_1, n + n_h) - 1,$$

denn n_h ist das einzige Element von $\mathcal{B}_h$ mit $n_1 \leq n_h < n_h + 1$. Daher haben wir

$$A_h(n) \geq B_h(n_1, n + n_1) - 1. \tag{3.21}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $S(n) = \sum_{h=1}^H A_h(n) \geq n$ für $n \geq 1$. Hierzu unterscheiden wir die folgenden drei Fälle:

1. $n_1 \leq n_1 + n < n_2$:

$$\begin{aligned} S(n) &\geq A_1(n) = B_1(n_1, n+n_1) - 1 = \sum_{h=1}^{H} B_1(n_1, n+n_1) - 1 \\ &\geq \frac{K+H}{K+1}(n+1) - 1 \geq n. \end{aligned}$$

2. $n_2 \leq n_1 + n < n_2 + K + 1$: Wegen (3.16) sind $n_2, n_2+1, \ldots, n_1+n$ in $\mathcal{B}_1$, und somit

$$\begin{aligned} S(n) \geq A_1(n) &= B_1(n_1, n_1+n) - 1 = \\ &= B_1(n_1, n_2 - 1) + n_1 + n - n_2 + 1 - 1 = \\ &= \sum_{h=1}^{H} B_h(n_1, n_2 - 1) + n_1 + n - n_2 \geq \\ &\geq \frac{K+H}{K+1}(n_2 - n_1) - (n_2 - n_1) + n \geq n. \end{aligned}$$

3. $n_2 + K + 1 \leq n_1 + n$: Es gilt $\{n_1, n_1+1, \ldots, n_1+K\} \subset \mathcal{B}_1$ und somit $S(n) \geq K$. Das würde genügen für $n \leq K$. Für $n \geq K+1$ nehmen wir (3.21) und (3.19) und erhalten

$$\begin{aligned} S(n) &\geq \frac{K+H}{K+1}(n+1) - H = \frac{K+1}{K+1}(n+1) + (H-1)\frac{n+1}{K+1} - H \geq \\ &\geq n + 1 - 1 + \frac{H-1}{K+1} \geq n. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle n $S(n) \geq n$. Wir wenden den Satz von Dyson an und erhalten $\mathbb{N} = \sum_{h=1}^{H} \mathcal{A}_h$. Damit ist jede Zahl $\geq \sum_{h=1}^{H} n_h$ in $\sum_{h=1}^{H} \mathcal{B}_h$ und somit jede ganze Zahl $\geq Hn_0$ in $H\mathcal{A}$. $\square$

Kapitel 4

Satz von Ramaré

Ramaré konnte 1995 eine Arbeit (siehe [20]) veröffentlichen, in der er bewies, dass die Primzahlen eine Basis der Ordnung 7 darstellen. Diese Arbeit ist der zentrale Teil meiner Diplomarbeit und soll in diesem Kapitel verifiziert werden. Dabei versuche ich, sämtliche Berechnungen in einem Abschnitt zusammenzufassen. Damit die Schritte nachvollziehbar sind, werde ich sie sehr ausführlich beschreiben. Außerdem kann der interessierte Leser die Programme zu den computativen Lemmata von mir beziehen.

4.1 Einleitung

Wie wir in einem vorigen Kapitel gesehen haben, gelang es Šnirelman zu beweisen, dass die Primzahlen eine Basis der Natürlichen Zahlen bilden. Dabei haben wir auch die Šnirelman Zahl definiert. Er selber war jedoch nur in der Lage, anzugeben, dass die Basis endlich ist. Erst Klimov ist es 1969 erstmals gelungen eine Abschätzung für die Ordnung der Basis zu geben (siehe [12]). Sein Wert war $6 \cdot 10^9$, welcher verglichen mit dem Goldbachschen Problem astronomisch hoch ist. Dennoch konnte die Ordnung immer weiter herabgesenkt werden bis es schließlich Riesel und Vaugahn gelang (siehe [23]), sie mit 19 zu bestimmen.

4.1.1 Zentrale Sätze und Beweisidee

In diesem Kapitel wagen wir uns noch einen Schritt weiter und setzen sie auf 7 herab.

Satz 4.1 (Ramaré)**.** *Jede gerade Zahl ist Summe von maximal 6 Primzahlen.*

Korollar 4.1.1. *Jede natürliche Zahl ist Summe von maximal 7 Primzahlen.*

Um dies zu beweisen gehen wir wie Šnirelman anno 1930 vor und zeigen zuerst mittels Siebmethoden, dass die Menge der Summen aus zwei Primzahlen positive Dichte hat (vergleiche Satz 3.4).

Satz 4.2. *Für alle $X \geq \exp(67)$ gilt*

$$\delta = \#\left\{N \in]X, 2X], \exists p_1, p_2 \text{ prim: } N = p_1 + p_2\right\} \geq \frac{X}{5}$$

Šnirelman wendete dann für seinen Beweis seinen Satz (3.1) an, der uns an dieser Stelle nicht genügen wird. Wir haben aber schon den Satz von Mann-Dyson (Satz 3.7) und von Ostmann (Satz 3.10) bewiesen. Letzterer wird uns genügen aus Satz 4.2 den Satz 4.1 zu folgern. Doch dazu später mehr.
Nachdem wir nun die zwei zentralen Sätze mit der Beweisidee gesehen haben, stellt sich die Frage, ob man die Abschätzung aus Satz 4.2 überhaupt erreichen kann. Dazu betrachten wir die "Menge der Ausnahmen"

$$E(X) = \# \{n \leq X, n \text{ gerade} \mid \nexists p, q \text{ prim: } p + q = n\}$$

Damit können wir das Goldbachsche Problem als die Vermutung, das $E(X) = 1$, sehen. Vaughan gelang es in einer Arbeit (siehe [30]) diesen Fehler abzuschätzen. Er konnte zeigen, dass für positives c und genügend großes X: $E(X) < X \exp(-c \log^{1/2} X)$. Mittels der Kreismethode und Abschätzungen für die Dirichlet-Reihen $L(\chi, s)$ von Gallagher konnten Montgomery & Vaughan diesen Fehler noch besser abschätzen und erhielten folgenden Satz:

Satz 4.3 (Montgomery&Vaughan [16]). *Es gibt eine positive Konstante ν, sodass für genügend großes X*

$$E(X) < X^{1-\nu}.$$

Damit können wir zumindest sagen, dass unser δ asymptotisch gegen $X/2 + \mathcal{O}(X^{1-\nu})$ strebt für positives ν.

4.1.2 Definitionen und Notation

Im Folgenden werden sämtliche Definitionen getroffen, die in diesem Kapitel verwendet werden. Wenn nicht anders angegeben, wird in den Beweisen auf diese Definitionen zurückgegriffen. So schreiben wir

$$f(x) = \mathcal{O}^*(g(x)) \Rightarrow |f(x)| \leq g(x)$$

Da wir primär an numerischen Abschätzungen interessiert sind, ist dies für uns eine bessere Notation als die gewöhnliche $\mathcal{O}$-Notation. Wir verwenden die Abkürzungen $e(\alpha) = \exp(2i\pi\alpha)$ und $S(\alpha) = \sum_n a_n e(n\alpha)$. Außerdem ist $\|S\|_2^2 = \sum_n |a_n|^2$, wenn $S(\alpha)$ wie vorhin. Mit

$$\sum_{a \bmod q}{}'$$

meinen wir die Summe über alle invertierbaren Restklassen a modulo q. Folgende Funktionen interessieren uns besonders:

$$\begin{aligned}
\phi_2(d) &= \prod_{p|d}(p-2) \\
\xi(d) &= \prod_{p|d}\left(\frac{2p-3}{p-1}\right) \\
\kappa(a,d) &= \begin{cases} a & \text{wenn } 2 \mid d \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Bei den numerischen Abschätzungen wollen wir uns Schreibarbeit ersparen und führen abkürzend folgende Funktionen ein

$$f_1(d) = \prod_{p|d}\left(1+p^{-2/3}\right)\left(1+\frac{p^{1/3}+p^{2/3}}{p(p-1)}\right)^{-1}, \tag{4.1}$$

$$f_2(d) = \prod_{p|d}\left(\frac{3p-4}{p-1}\right)^2\frac{1}{p(p-1)}, \tag{4.2}$$

$$f_3(d) = \prod_{p|d}\left(\frac{f_2(p)}{1+f_2(p)}\right), \tag{4.3}$$

$$f_4(d) = \prod_{p|d}\left(\frac{1}{p^2-3p+3}\right) \quad \text{und} \tag{4.4}$$

$$f_5(d) = \prod_{p|d}\left(\frac{2p-3}{p-1}\frac{p^2}{1+p(p-1)}\right). \tag{4.5}$$

Des weiteren möchte ich an dieser Stelle die Wichtigen Konstanten einführen und dann immer hierher verweisen. Diese sind

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_2 &= 2\prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \quad \text{mit } 1.320322 < \mathfrak{S}_2 < 1.320323, \\
\mathcal{D} &= \{d \geq 1,\ d \text{ ungerade, quadratfrei und } \phi(d) \leq 60\} \text{ und} \\
\delta = \delta(X) &= \frac{1}{X}\#\{N \in]X, 2X] \mid \exists (p_1,p_2) \in \mathcal{P}^2 :\ N = p_1 + p_2\}.
\end{aligned}$$

Vor allem letztere wird von zentraler Bedeutung sein für den Beweis von Satz 4.2. Schließlich brauchen wir noch die Primzahlverteilungen

$$\theta(X) = \sum_{p\leq X} \log p,$$

$$\widehat{\theta}(X) = \theta(X) - \theta(\sqrt{X}) = \sum_{\sqrt{X}<p\leq X} \log p \text{ und}$$

$$\theta(X; d, l) = \sum_{\substack{p\leq X\\ p\equiv l \bmod d}} \log p.$$

Diese spielen eine zentrale Rolle, vor allem in Zusammenhang mit der Menge $\mathcal{D}$. Wir wollen nun die Primzahlverteilungen für die Modulen aus $\mathcal{D}$ abschätzen.

Lemma 4.1.1. *Sei $X \geq \exp(50)$, dann gilt für alle $d \in \mathcal{D}$*

$$\max_{y\leq X} \left| \theta(y, d, l) - \frac{y}{\phi(d)} \right| \leq \varepsilon_d \frac{X}{\phi(d)}$$

mit ε_d aus folgender Tabelle:

d	ε_d	d	ε_d	d	ε_d	d	ε_d
1	$1.7285\cdot10^{-5}$	19	0.00944	39	0.00913	59	0.01079
3	0.00212	21	0.00827	41	0.01037	61	0.01083
5	0.00232	23	0.00967	43	0.01043	65	0.01027
7	0.00243	29	0.00995	47	0.01053	69	0.01044
11	0.00257	31	0.01004	51	0.01006	77	0.01059
13	0.00262	33	0.00890	53	0.01066	87	0.01071
15	0.00774	35	0.00941	55	0.01004	93	0.01079
17	0.00931	37	0.01025	57	0.01021	105	0.01037

Beweis. Der Beweis sowie die Werte für die ε_d befinden sich in [21]. □

4.2 Das einhüllende Sieb

Die zentrale Idee ist es, eine obere und untere Abschätzung für $\delta(X)$ zu bekommen, um dann δ darin einzuwickeln und das gewünschte Resultat zu erhalten. Diese stammt von Hooley, der jedoch das Brun'sche Sieb verwendet und nicht so wie wir hier das Selberg Sieb.

Hierzu definieren wir

Definition 4.2.1.

$$G_d(t) = \sum_{\substack{(k,d)=1 \\ k \le t}} \frac{\mu^2(k)}{\phi(k)} \text{ und } G(t) = G_1(t).$$

Diese Funktion ist uns bereits aus dem Siebtheorie-Kapitel bekannt. Im Lemma 4.4.4, werden wir zeigen, dass

$$G_d(t) \sim \frac{\phi(d)}{d} \log t \tag{4.6}$$

Nun definieren wir die Gewichte, die die Möbius-Funktion ersetzen.

Definition 4.2.2.

$$\lambda_d = \mu(d) \frac{\frac{d}{\phi(d)} G_d(z/d)}{G(z)} \tag{4.7}$$

Man kann sehr leicht nachprüfen, dass $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_d = 0$ für $d > z$. Damit ist der Siebbereich auf z beschränkt. Schließlich definieren wir $\beta(y)$ für beliebige ganze Zahlen y, durch

$$\beta(y) = \left(\sum_{d|y} \lambda_d \right)^2. \tag{4.8}$$

Für die $\beta(y)$ gilt somit:

- $\beta(y) \ge 0$ für alle y und
- $\beta(p) = 1$ für jede Primzahl p größer als z.

Diese Eigenschaften machen $\beta(y)$ zu einem guten Kanditaten für unserer Problem. Doch was sind wirklich die Vorteile und Nachteile dieser Wahl?

- Man kann ganz leicht überprüfen, dass

  $$\sum_{y \le X} \beta(y) = \frac{X}{G(z)} + \mathcal{O}\left(\frac{z^2}{\log^2 z} \right)$$

  Wir kombinieren diese Beobachtung mit (4.6) und erhalten eine Lösung für die Wahl von z. Denn für $\log z \sim \frac{1}{2} \log X$ bekommen wir für $\beta(y)$ eine doppelt so große Folge, wie die der Primzahlen.

- Wir definieren

$$\omega_d = \sum_{\substack{d_1,d_2\\ d|[d_1,d_2]}} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_1}}{[d_1,d_2]} \tag{4.9}$$

Wir können nachprüfen, dass

$$\omega_d = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{y\le T} \beta(y)e(ay/d)$$

und aus der Definition der ω_d und der freien Wahl der a erkennen wir, dass die β gleichverteilt under den Progressionen $\{a + kd \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ für alle zu d relativ primen a sind. Außerdem haben wir dann

$$\sum_{y\le X} \beta(y)e(ay/d) = X\omega_d + \mathcal{O}\left(d\frac{z^2}{\log^2 z}\right).$$

Im nächsten Abschnitt werden wir dann zeigen, dass nur die ω_d die eigentliche Fehlerabschätzung ausmachen.

4.3 Eine obere Schranke für $\delta(X)$

Von jetzt bis zum Ende des Kapitels sei N eine gerade ganze Zahl.
Wir wollen

$$\rho(N) = \sum_{p_1+p_2=N} 1$$

nach oben abschätzen. Diese Größe sollte asymptotisch, für N nach unendlich, gegen $\mathfrak{S}_2(N)N/\log^2 N$ gehen. Dabei ist

$$\mathfrak{S}_2(N) = \mathfrak{S}_2 \prod_{\substack{p|N\\ p\neq 2}} \frac{p-1}{p-2} \text{ mit } \mathfrak{S}_2 = 2\prod_{p\ge 3}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \tag{4.10}$$

die Singuläre Reihe des Goldbach Problems. Um nun eine obere Schranke für $\rho(N)$ zu bekommen, ersetzen wir die charakteristische Funktion der Primzahlen p_1 mit der gewichteten Folge β. Sei $X \ge 1$ und N aus $]X, 2X]$. Wir betrachten

$$r_2(N) = \sum_{\substack{p_1+p_2=N\\ \sqrt{X}\le p_1\\ p_2\le X}} \log p_2. \tag{4.11}$$

$r_2(N)$ sollte sich asymptotisch wie $\mathfrak{S}_2(N)X/\log X$ verhalten. Deswegen betrachten wir

$$R_2(N) = \sum_{\substack{y+p_2=N\\ p_2\leq X}} \beta(y)\log p_2, \tag{4.12}$$

wobei β wie in (4.8) definiert ist. Es gilt offensichtlich

$$r_2(N) \leq R_2(N)$$

und wir vermuten, dass sich $R_2(N)$ für N gegen Unendlich asymptotisch wie $\mathfrak{S}_2(N)X/G(z)$ verhält. Um das Studium der $R_2(N)$ zu vertiefen, führen wir die Funktion

$$T(\alpha) = \sum_{p\leq X} \log p\ e(p\alpha) \tag{4.13}$$

ein. Diese Funktion soll uns helfen, die Summation umzuschreiben, hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q}\sum_{d|q}\sideset{}{'}\sum_{a \bmod d} T(a/d)e(-Na/d) &= \frac{1}{q}\sum_{d|q}\sideset{}{'}\sum_{a \bmod d}\sum_{\substack{p\leq X\\ p\equiv N \bmod d}} \log p = \\
&= \frac{1}{q}\sum_{d|q}\phi(d)\sum_{\substack{p\leq X\\ p\equiv N \bmod q}} \log p = \\
&= \sum_{\substack{p\leq X\\ p\equiv N \bmod q}} \log p
\end{aligned}$$

Wir können nun (4.12), (4.8) und (4.13) kombinieren und erhalten

$$\begin{aligned}
R_2(N) &= \sum_{\substack{y+p_2=N\\ p_2\le X}} \left(\sum_{d|y} \lambda_d\right)^2 \log p_2 = \\
&= \sum_y \sum_{\substack{d_1|y\\ d_2|y}} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{\substack{p_2=N-y\\ p_2\le X}} \log p_2 = \\
&= \sum_{d_1,d_2} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{[d_1,d_2]|y} \sum_{\substack{p_2=N-y\\ p_2\le X}} \log p_2 = \\
&= \sum_{d_1,d_2} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{\substack{p_2=N \bmod [d_1,d_2]\\ p_2\le X}} \log p_2 = \qquad (4.14)\\
&= \sum_{d_1,d_2} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]} \sum_{d|[d_1,d_2]} \sideset{}{'}\sum_{a \bmod d} T(a/d)e(-Na/d) = \\
&= \sum_d \sum_{\substack{d_1,d_2\\ d|[d_1,d_2]}} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]} \sideset{}{'}\sum_{a \bmod d} T(a/d)e(-Na/d) = \\
&= \sum_{d\le z^2} \omega_d \sideset{}{'}\sum_{a \bmod d} T(a/d)e(-Na/d)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass wir zwei Vorteile durch die Wahl der $R_2(N)$ haben

1. Der Siebvorgang hängt nicht von N ab. Das ist auf Grund des einhüllenden Siebes so.

2. ω_d ist eng verknüpft mit einer Trigonometrischen Summe im Punkt a/d. Dass nur ω_d als Fehler erscheint ist von Vorteil, jedoch können wir dem keine Information bezüglich der Primzahlverteilung entnehmen.

Dies sieht man sehr leicht, wenn man die beiden Summen durch ihre optimale Repräsentation ersetzt.

$$\begin{aligned}
\omega_d &\longrightarrow \frac{\mu(d)}{\phi(d)G(z)}\\
T(a/d) &\longrightarrow \frac{\mu(d)}{\phi(d)}\theta(X)
\end{aligned}$$

Dadurch wird aus der vorigen Darstellung

$$\frac{\theta(X)}{G(z)} \sum_{d\le z^2} \frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)} c_d(N).$$

Wobei $c_d(N)$ der Ramanujan Summe entspricht. Dieser Ausdruck entspricht asymptotisch $\mathfrak{S}_2(N)X/G(z)$ für z groß genug. Aber hier ist das Problem, dass diese Reihe nicht gleichmäßig in N konvergiert. Deswegen reicht es nicht nur eine begrenzte Anzahl an Termen zu nehmen und dort die Summe abzuschneiden. Aber wir können zeigen, dass sie fast überall gleichmäßig konvergiert. (Zum Beispiel

$$\max_{X>1} \frac{1}{X} \sum_{X<N\leq 2X} \left| \sum_{d\leq t} \frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)} c_d(N) - \mathfrak{S}_2(N) \right| = \mathcal{O}(t^{-1/2}) \text{ für } t \to \infty.)$$

4.4 Einige numerische Abschätzungen

Bevor wir mit dem Beweis fortfahren, möchte ich die numerischen Werkzeuge zurechtlegen. Sämtliche Beweise in diesem Kapitel sind computergestützt. Sollte der Leser interessiert an meinen verwendeten Programmen sein, so kann ich sie Ihm übermitteln.

Lemma 4.4.1. *Sei f eine nicht-negative multiplikative reell-wertige Funktion und sei d eine positive ganze Zahl. Für alle $x \geq 0$ gilt*

$$\sum_{n\leq x} \mu^2(n) f(n) \leq \prod_{p|d} (1+f(p)) \sum_{\substack{n\leq x\\(n,d)=1}} \mu^2(n) f(n) \leq \sum_{n\leq xd} \mu^2(n) f(n)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \mu^2(n) f(n) &= \sum_{D|d} \sum_{\substack{n\leq x\\(n,d)=D}} \mu^2(n) f(n) = \\
&= \sum_{D|d} \mu^2(D) f(D) \sum_{\substack{n\leq x/D\\(n,d)=1}} \mu^2(n) f(n) = \\
&= \prod_{p|d} (1+f(p)) \sum_{\substack{n\leq x/p\\(n,d)=1}} \mu^2(n) f(n) \leq \\
&\leq \prod_{p|d} (1+f(p)) \sum_{\substack{n\leq x\\(n,d)=1}} \mu^2(n) f(n) \qquad = \sum_{D|d} \sum_{\substack{n\leq xD\\(n,d)=D}} \mu^2(n) f(n) \leq \\
&\qquad\qquad \leq \sum_{D|d} \sum_{\substack{n\leq xd\\(n,d)=D}} \mu^2(n) f(n) \\
&\qquad\qquad = \sum_{n\leq xd} \mu^2(n) f(n)
\end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma werden wir mehrmals zur Abschätzung von Reihen verwenden. Dabei ist die Idee ganz einfach, denn wir verwenden die zugehörige Dirichletreihe, die wir dann mittels partieller Summation abschätzen und um 0 entwickeln.

Lemma 4.4.2. *Seien $(g_n)_{n\geq 1}$,$(h_n)_{n\geq 1}$ und $(k_n)_{n\geq 1}$ drei komplexe Folgen. Sei $H(s) = \sum_n h_n n^{-s}$ und $\overline{H}(s) = \sum_n |h_n| n^{-s}$. Wenn $g = h \star k$, $\overline{H}(s)$ konvergent für $\Re(s) \geq -1/3$, und es vier Konstanten A,B,C und D gibt, sodass*

$$\sum_{n\leq t} k_n = A\log^2 t + B\log t + C + \mathcal{O}^*(Dt^{-1/3}) \text{ für } t > 0,$$

dann gilt für alle $t > 0$

$$\sum_{n\leq t} g_n = u\log^2 t + v\log t + w + \mathcal{O}^*(Dt^{-1/3}\overline{H}(-1/3))$$

mit $u = AH(0)$,$v = 2AH'(0) + BH(0)$ und $w = AH''(0) + BH'(0) + CH(0)$. Außerdem gilt

$$\sum_{n\leq t} ng_n = Ut\log t + Vt + W + \mathcal{O}^*(2.5Dt^{2/3}\overline{H}(-1/3))$$

mit $U = 2AH(0)$, $V = -2AH(0) + 2AH'(0) + BH(0)$ und $W = A(H''(0) - 2H'(0) + H(0)) + B(H'(0) - H(0)) + CH(0)$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq t} g_n = \sum_m h_m \sum_{n\leq t/m} k_n &= H(0)(A\log^2 t/m + B\log t/m + C + \mathcal{O}^*(Dt^{-1/3})) = \\ &= H(0)(A\log^2 t - 2A\log t\log m + A\log^2 m + \\ &\quad B\log t - B\log m + C + \mathcal{O}^*(Dt^{-1/3})) = \\ &= AH(0)\log^2 t + 2AH'(0)\log t + AH''(0) + \\ &\quad BH(0)\log t + BH'(0) + CH(0) + \mathcal{O}^*(Dt^{-1/3}H(0))) = \\ &= u\log^2 t + v\log t + w + \mathcal{O}^*(Dt^{-1/3}\overline{H}(-1/3))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq t} ng_n = t\sum_{l\leq t} g_l - \int_1^t \sum_{l\leq s} g_l ds &= ut\log^2 t - vt\log t + wt + \mathcal{O}^*(Dt^{2/3}\overline{H}(-1/3))) - \\ &\quad - (u(-2 + 2t - 2t\log t + t\log^2 t) + v(1 - t + t\log t) + \\ &\quad w(t-1) + \mathcal{O}^*(\frac{3}{2}Dt^{2/3}\overline{H}(-1/3))) = \\ &= u(2t\log t - 2t + 2) + v(t-1) + w + \mathcal{O}^*(2.5Dt^{2/3}\overline{H}(-1/3))) = \\ &= (2u)t\log t + (-2u + v)t + (u - v + w) + \mathcal{O}^*(2.5Dt^{2/3}\overline{H}(-1/3)))\end{aligned}$$

□

Lemma 4.4.3. *Für alle $t > 0$ gilt*

$$\sum_{n \le t} \frac{1}{n} = \log t + \gamma + \mathcal{O}^*(0.9105 t^{-1/3}).$$

Sei $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n, dann gilt für alle $t > 0$

$$\sum_{n \le t} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2} \log^2 t + 2\gamma \log t + \gamma^2 - \gamma_1 + \mathcal{O}^*(1.641 t^{-1/3}),$$

mit

$$\gamma_1 = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{m \le n} \frac{\log m}{m} - \frac{\log^2 n}{2} \right)$$

Beweis. Der zweite Teil wird von Riesel&Vaughan gezeigt (siehe [23], Lemma 1). Für den anderen unterscheiden wir zwei Fälle:

- Für $t \ge 1$ verwenden wir die Darstellung von γ als Limes der Folge

$$g_n = \sum_{k \le n} \frac{1}{k} - \log n$$

für $n \to \infty$. Dabei ist $g_n - \gamma$ maximal für n ganz. Deswegen können wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} g_n - \gamma &= \int_1^n \frac{\{t\}}{t^2} dt - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt = \\ &= \int_n^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt = \\ &= \sum_{k=n}^\infty \int_k^{k+1} \frac{1}{t} - \frac{k}{t^2} dt < \\ &< \frac{1}{2} \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \\ &= \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

- Für $0 < t < 1$ betrachten wir die Ungleichung $\log t + \gamma + a t^{-1/3} \ge 0$. Wenn man diese differenziert erhält man

$$-\frac{a}{3\, t^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow \widehat{t} = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

Diese Extremstelle ist ein Minimum, da $\log t + \gamma + at^{-1/3}$ fallend ist für $0 < t < \widehat{t}$. Daraus folgt für das minimale a,

$$\begin{aligned} 3 + \gamma + 3\log\frac{a}{3} &\geq 0 \\ \exp(1+\gamma/3)\cdot\frac{a}{3} &\geq 1 \\ a &\geq 3\cdot\exp(-\gamma/3 - 1) \approx 0.91047 \end{aligned}$$

□

Wir werden nun mehrere Male die letzten 3 Lemmata anwenden. Wir interessieren uns immer für Summen der Form $\sum_{n\leq x} g_n n^{-s}$ und wollen diese in Abhängigkeit von x abschätzen. Dabei verwenden wir Lemma 4.4.2 indem wir $\sum k_n n^{-s} = \zeta(s+1)^b$ mit $b = 1, 2$ setzen. Eine Abschätzung für $\sum_{n\leq x} k_n$ liefert uns Lemma 4.4.3. Wir rechnen uns dann (h_n) durch $\sum h_n n^{-s} = (\sum g_n n^{-s})(\zeta(s+1))^{-b}$ aus. Dabei haben wir als g_n zumeist Funktionen die nur für quadratfreie n und niedrige Primzahlpotenzen $\neq 0$ sind. Dann können wir auch die Darstellung als Euler-Produkt verwenden. Damit haben wir dann $g = h \star k$ wie in Lemma 4.4.2 gefordert.
Für die endgültige numerische Abschätzung benötigen wir noch $H(0)$ und seine Ableitungen. Diese errechnen sich aber zu

$$H(0) = \prod_p \left(1 + \sum_m h_{p^m}\right)$$

Die logarithmische Ableitung von $H(s)$ liefert $H'(0)$:

$$\frac{H'(0)}{H(0)} = \sum_p \frac{\sum_m h_{p^m}}{1 + \sum_m h_{p^m}}(-\log p).$$

Für $H''(0)$ leiten wir $H'(s)/H(s)$ erneut ab und erhalten

$$\frac{H''(0)}{H(0)} = \left(\frac{H'(0)}{H(0)}\right)^2 + \sum_p \left[\frac{\sum_m h_{p^m}}{1+\sum_m h_{p^m}} - \left(\frac{\sum_m h_{p^m}}{1+\sum_m h_{p^m}}\right)^2\right]\log^2 p$$

Damit können wir die numerischen Abschätzungen durchführen. Dabei verwenden wir den zweiten Teil von Lemma 4.4.2 und das Lemma 4.4.1 entsprechend, wenn wir sie brauchen.

Lemma 4.4.4. *Für alle $X > 0$ und alle positiven ganzen Zahlen d gilt*

$$\sum_{\substack{n\leq X\\(n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)} = \frac{\phi(d)}{d}\left\{\log X + \gamma + \sum_{p\geq 2}\frac{\log p}{p(p-1)} + \sum_{p|d}\frac{\log p}{p}\right\} + \mathcal{O}(7.466X^{-1/3}f_1(d))$$

mit $f_1(d)$ wie in (4.1).

Bemerkung. Nach Rosser&Schönfeld ([24], (2.11)) gilt

$$\gamma + \sum_{p\geq 2} \frac{\log p}{p(p-1)} = 1.33258227533221\ldots$$

Beweis. Wie oben beschrieben bestimmt man zuerst $h_d(n)$, sodass

$$\sum_{\substack{n\geq 1\\(n,d)=1}} \frac{h_d(n)}{n^s}\zeta(s+1) = \sum_{\substack{n\geq 1\\(n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)n^s}$$

Hierzu betrachtet man die Euler-Produkt-Darstellung:

$$\zeta(s+1)^{-1}\prod_{p\nmid d}\left(1+\frac{1}{(p-1)p^s}\right) =$$

$$\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)\prod_{p\nmid d}\frac{(p-1)p^{s+1}+p}{(p-1)p^{s+1}}\frac{p^{s+1}-1}{p^{s+1}} =$$

$$\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)\prod_{p\nmid d}\frac{(p-1)p^{2s+2}+p^{s+2}-(p-1)p^{s+1}-p}{(p-1)p^{2s+2}} =$$

$$\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)\prod_{p\nmid d}\frac{p^{3s+2}-p^{2s+2}+p^{s+2}-p^{s+2}+p^{s+1}-p}{(p-1)p^{2s+2}} =$$

$$\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)\prod_{p\nmid d}\frac{p^{2s+2}-p^{2s+1}+p^{s}-1}{(p-1)p^{2s+1}} =$$

$$\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)\prod_{p\nmid d}\left(1+\frac{p^s-1}{(p-1)p^{2s+2}}\right) =$$

$$\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\frac{1}{p^s}\right)\prod_{p\nmid d}\left(1+\frac{1}{(p-1)p}\frac{1}{p^s}-\frac{1}{(p-1)p}\frac{1}{p^{2s}}\right)$$

Damit fällt uns folgende Definition für $h_d(n)$ in die Hand:

$$h_d(p^m) = \begin{cases} \frac{1}{p(p-1)} & \text{für } p\nmid d \text{ und } m=1\\ \frac{-1}{p(p-1)} & \text{für } p\nmid d \text{ und } m=2\\ 0 & \text{für } p\nmid d \text{ und } m\geq 3\\ \frac{\mu(p^m)}{p^m} & \text{für } p\mid d \text{ und } m\geq 1 \end{cases}$$

Wir wenden nun Lemma 4.4.2 an und erhalten

$$\sum_{\substack{n\leq X\\(n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)} = H_d(0)\,\log X + H_d'(0) + \gamma\, H_d(0) + \mathcal{O}^*(0.9105\, X^{-1/3}\overline{H}_d(-1/3)) =$$

$$= H_d(0)\left\{\log X + \gamma + \frac{H_d'(0)}{H_d(0)}\right\} + \mathcal{O}^*(0.9105\, X^{-1/3}\overline{H}_d(-1/3))$$

Wir brauchen nur noch

$$H_d(0) = \prod_{p|d}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{p|d}\frac{p-1}{p} = \frac{\phi(d)}{d},$$

$$\begin{aligned}\frac{H_d'(0)}{H_d(0)} &= \sum_{p|d}\frac{\frac{-1}{p}}{1-\frac{1}{p}}(-\log p) + \sum_{p\nmid d}\left(\frac{1}{p(p-1)} + \frac{-2}{p(p-1)}\right)(-\log p) = \\ &= \sum_{p|d}\frac{\log p}{p-1} + \sum_{p\nmid d}\frac{\log p}{p(p-1)} = \\ &= \sum_{p|d}\frac{\log p}{p} + \sum_{p}\frac{\log p}{p(p-1)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\overline{H}_d(-1/3) &= \prod_{p|d}\left(1 - \frac{1}{p}\frac{1}{p^{-1/3}}\right)\prod_{p\nmid d}\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\frac{1}{p^{-1/3}} + \frac{1}{p(p-1)}\frac{1}{p^{-2/3}}\right) = \\ &= \prod_{p|d}\left(1 - \frac{1}{p^{-2/3}}\right)\left(1 + \frac{p^{1/3}+p^{2/3}}{p(p-1)}\right)^{-1}\prod_{p}\left(1 + \frac{p^{1/3}+p^{2/3}}{p(p-1)}\right) \leq \\ &\leq f_1(d)\cdot 8.2\end{aligned}$$

berechnen. □

Lemma 4.4.5. *1. Für $z \geq 1$, gilt $G(z) \leq \log z + 1.4709$*

2. Für $z \geq 6$, gilt $1.06 + \log z \leq G(z)$

3. Für $z \geq \exp(18)$ und $\alpha \geq 1.39$, gilt $G(z^\alpha) \leq \alpha G(z)$

Beweis. Wir verändern Lemma 4.4.2 derart, dass wir nicht 1/3 sondern 0.45 als Exponent verwenden. In Anlehnung an den Beweis von Lemma 4.4.3 bekommen wir dann:

$$\frac{1}{t} - 0.45\cdot at^{-1.45} = 0 \Rightarrow \widehat{t} = (0.45a)^{\frac{1}{0.45}}$$

Und damit für die Konstante a

$$\begin{aligned}\frac{1}{0.45}\log(0.45a) + \gamma + \log\frac{1}{0.45} &\geq 0 \\ 0.45a\cdot\exp(1+0.45\gamma) &\geq 1 \\ a &\geq \frac{\exp(-1-0.45\gamma)}{0.45}\end{aligned}$$

Setzten wir nun in die asympthotische Formel aus Lemma 4.4.4 ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
G(z) - \log z &\le 1.4708 \\
\log z + 1.332582 + \overline{H}(-0.45)\frac{\exp(-1-0.45\gamma)}{0.45} z^{-0.45} - \log z &\le 1.4708 \\
\log\left(\overline{H}(-0.45)\frac{\exp(-1-0.45\gamma)}{0.45}\right) - 0.45\log z &\le \log(1.4708 - 1.332582) \\
\frac{1}{0.45}\log\left(\overline{H}(-0.45)\frac{\exp(-1-0.45\gamma)}{0.45(1.4708-1.332582)}\right) &\le \log z
\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir nur noch $\overline{H}(-0.45)$ genügend genau bestimmen. Hierzu verifizieren wir zuerst, dass

$$\prod_{2\le p\le 200000}\left(1+\frac{p^{0.45}+p^{0.9}}{p(p-1)}\right) \le 20.26$$

Der Rest erfolgt mittels Partieller Integration und der Abschätzung $\theta(t) \le 1.001093t$ für $t > 0$ (siehe [27] und [26]); sei $X = 200000$ und $F(t) = \frac{p^{0.45}+p^{0.9}}{p(p-1)(\log p)}$

$$\begin{aligned}
\log\prod_{p>X}\left(1+\frac{p^{0.45}+p^{0.9}}{p(p-1)}\right) &\le \sum_{p>X}\frac{p^{0.45}+p^{0.9}}{p(p-1)\log p}\log p = \\
&= \sum_{p>X} F(p)\log p = \\
&= \theta(X)F(X) + \int_X^\infty F(t)(\theta(t))'dt \le \\
&\le 1.001093(XF(X) + \int_X^\infty F(t)dt) \le 0.26647
\end{aligned}$$

Damit wäre das Lemma für $z \ge 42300$ bewiesen. Für alle anderen z führt eine direkte Berechnung zum Ziel.

$$\max_{z\ge 1}(G(z) - \log z) = G(7) - \log 7 \le 1.4709$$

Die untere Abschätzung für $G(z) - \log z$ stammt von Montgomery & Vaughan (siehe [15],Lemma 7).
Der dritte Teil folgt aus den beiden ersten:

$$G(z^\alpha) \le \alpha \log z + 1.4709 \le \alpha(\log z + 1.06) \le \alpha G(z)$$

□

Lemma 4.4.6. *Sei $y \ge 1$, dann gilt*

$$\sum_{n\le y}\frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)} = \frac{3}{4}\left\{\log y + \gamma + \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} + \frac{\log 2}{6}\right\} + \mathcal{O}^*(4.28y^{-1/3}).$$

Außerdem gilt folgende untere Schranke

$$\sum_{n\le y}\frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)}\ge\frac{3}{4}\log y$$

Sei $d\le y$ *und* $y\ge\exp(18)$, *dann*

$$\sum_{\substack{n\le y\\(n,d)=1}}\frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)}\le\kappa(4/3,d)\frac{\phi(d)}{d}\frac{3}{4}\left(2\log y+1.448\right)$$

Beweis. Die Summe entspricht der aus Lemma 4.4.4 mit $d=1$ für n ungerade. Deswegen genügt es $h_1(2^m)$ zu berechnen.

$$\left(1-\frac{1}{2^{s+1}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{s+1}}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{2s+2}}\right)$$

Daraus folgt

$$h_1(2^m)=\begin{cases}-\frac{1}{4} & \text{für } m=2,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Jetzt können wir die Koeffizienten für Lemma 4.4.2 berechnen.

$$H(0)=\left(1-\frac{1}{4}\right)\prod_{2<p}\left(1+\frac{1}{p(p-1)}-\frac{1}{p(p-1)}\right)=\frac{3}{4}$$

$$H'(0)=\frac{-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}(-\log 2)+\sum_{2<p}\frac{\frac{1}{p(p-1)}-\frac{2}{p(p-1)}}{1}(-\log p)=\frac{\log 2}{6}+\sum_{p}\frac{\log p}{p(p-1)}$$

Womit der erste Teil bewiesen wäre.
Für den zweiten Teil definieren wir

$$\begin{aligned}\overline{G}(y):=\sum_{n\le y}\frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)}&=\sum_{\substack{n\le y\\2|n}}\frac{1}{2}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}+\sum_{\substack{n\le y\\2\nmid n}}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}=\\&=\sum_{n\le y}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{n\le y\\2|n}}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}=\\&=G(y)-\frac{1}{2}\sum_{\substack{n\le y/2\\(n,2)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}=\\&=G(y)-\frac{1}{2}G_2(y/2)\end{aligned}$$

Da offensichtlich $G_2(y/2) \leq G(y)/2$ ist, haben wir mit Lemma 4.4.5(2)

$$\overline{G}(y) = G(y) - \frac{G_2(y/2)}{2} \geq G(y) - \frac{G(y)}{4} = \frac{3}{4}G(y) \geq \frac{3}{4}\log y$$

Für die letzte Aussage benötigen wir Lemma 4.4.1

$$\sum_{\substack{n\leq y\\(n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)} \leq \prod_{p|d}\left(1+\frac{\kappa(1/2,p)}{\phi(p)}\right)^{-1} \sum_{n\leq yd} \frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)} =$$

$$= \kappa(2/3,d)\prod_{2<p|d}\frac{p-1}{p}\frac{3}{4}\left(\log yd + \gamma + \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} + \frac{\log 2}{6}\right) =$$

$$= \kappa(4/3,d)\frac{\phi(d)}{d}\frac{3}{4}(2\log y + 1.448)$$

□

Lemma 4.4.7. *Sei A eine positive reelle Zahl und $y \geq A^2$. Dann gilt für $l \leq y$ und $y \geq \exp(18)$*

$$\sum_{\substack{n\leq y\\(n,l)=1}} \frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)}\frac{1}{1+\frac{A}{n}} \leq \kappa(4/3,l)\frac{\phi(l)}{l}\frac{3}{4}\left(2\log y + 1.448 - \log A\right).$$

Beweis. Wir definieren

$$\overline{G}(y) = \sum_{n\leq y}\frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)}$$

$$\overline{G}^*(y) = \sum_{n\leq y}\frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)}\frac{1}{1+\frac{A}{n}}$$

Zuerst zeigen wir, dass $\overline{G}^*(y) \leq \overline{G}(y) - \frac{3}{4}\log A$, um dann, wie im vorigen Lemma, auf das Gewünschte zu schließen.

$$\overline{G}(y) - \overline{G}^*(y) = A\sum_{n\leq y}\frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)}\frac{1}{n+A} =$$

$$= A\frac{\overline{G}(y)}{y+A} + A\int_1^y \overline{G}(t)\frac{dt}{(t+A)^2} \geq$$

$$\geq \frac{3A}{4}\left\{\frac{\log y}{y+A} + \left[\frac{-\log t}{t+A}\right]_{t=1}^{t=y} + \int_1^y \frac{dt}{t(t+A)}\right\} \geq$$

$$\geq \frac{3A}{4}\log\left\{\frac{y}{y+A}(1+A)\right\}$$

und

$$\frac{y(A+1)}{y+A} \geq A \Leftrightarrow y \geq A^2$$

Der Rest folgt aus Lemma 4.4.1

$$\sum_{\substack{n\leq y\\(n,l)=1}} \frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)} \frac{1}{1+\frac{A}{n}} \leq \kappa(4/3,l)\frac{\phi(l)}{l} \sum_{n\leq yl} \frac{\mu^2(n)\kappa(1/2,n)}{\phi(n)} \frac{1}{1+\frac{A}{n}}$$

□

Lemma 4.4.8. *Sei $y > 0$ und $a \in \{1/2, 2/3\}$, dann gilt*

$$\sum_{n\leq y} \mu^2(n)\frac{\kappa(a,n)\xi(n)}{n} = k_9(a)\log^2 y + k_{10}(a)\log y + k_{11}(a) + \mathcal{O}^*(1.641y^{-1/3}\varepsilon(a))$$

wobei $\xi(n) = \prod_{p|n}(2p-3)/(p-1)$. Die Konstanten erfüllen folgende Abschätzungen

$0.0741 \leq k_9(1/2) \leq 0.0742$	$0.0790 \leq k_9(2/3) \leq 0.0791$
$0.650 \leq k_10(1/2) \leq 0.651$	$0.687 \leq k_10(2/3) \leq 0.689$
$0.714 \leq k_11(1/2) \leq 0.715$	$0.738 \leq k_11(2/3) \leq 0.739$
$\varepsilon(1/2) = 20.1$	$\varepsilon(2/3) = 21$

Außerdem gilt

$$\sum_{n\leq y} \mu^2(n)\xi(n)\kappa(a,n) = k_3(a)y\log y + k_4(a)y + k_5(a) + \mathcal{O}^*(4.1025y^{2/3}\varepsilon(a))$$

mit

$0.148 \leq k_3(1/2) \leq 0.149$	$0.158 \leq k_3(2/3) \leq 0.159$
$0.5 \leq k_4(1/2) \leq 0.502$	$0.529 \leq k_4(2/3) \leq 0.531$
$0.223 \leq k_5(1/2) \leq 0.225$	$0.220 \leq k_5(2/3) \leq 0.222$

Dabei folgt unmittelbar aus dem zweiten Teil von Lemma 4.4.2:

$$k_3(a) = 2k_9(a), \quad k_4(a) = -2k_9(a) + k_10(a), \quad k_5(a) = 2k_9(a) - k_10(a) + k_11(a)$$

Beweis. Wir gehen so vor, wie in den vorangegangenen Lemmata und bestimmen zuerst die Funktion h_a, sodass

$$\sum_n \frac{\mu^2(n)\kappa(a,n)\xi(n)}{n^{s+1}} = \sum_n \frac{h_a(n)}{n^s}\zeta^2(s+1)$$

Wenn wir die Summe als Eulerprodukt darstellen, erhalten wir für alle Primzahlen > 2

$$\prod_{p>2}\left(1+\frac{2p-3}{p(p-1)}\frac{1}{p^s}\right)\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)^2 =$$
$$\prod_{p>2}\left(1+\frac{2p-3}{p(p-1)}\frac{1}{p^s}-\frac{2}{p}\frac{1}{p^s}-\frac{2(2p-3)}{p^2(p-1)}\frac{1}{p^{2s}}\frac{1}{p^2}\frac{1}{p^{2s}}+\frac{2p-3}{p^3(p-1)}\frac{1}{p^{3s}}\right) =$$
$$\prod_{p>2}\left(1+\frac{-1}{p(p-1)}\frac{1}{p^s}+\frac{5-3p}{p^2(p-1)}\frac{1}{p^{2s}}+\frac{2p-3}{p^3(p-1)}\frac{1}{p^{3s}}\right)$$

und für $p = 2$

$$\left(1+\frac{a}{2}\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{2^s}\right)^2 = \left(1+\frac{a}{2}\frac{1}{2^s}-\frac{1}{2^s}-\frac{a}{2}\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{4}\frac{1}{2^{2s}}+\frac{a}{8}\frac{1}{2^{3s}}\right).$$

Jetzt sind wir in der Lage $h_a(n)$ zu bestimmen:

$$h_a(p^m) = \begin{cases} \frac{-1}{p(p-1)} & \text{für } m=1 \\ \frac{5-3p}{p^2(p-1)} & \text{für } m=2 \\ \frac{2p-3}{p^3(p-1)} & \text{für } m=3 \\ 0 & \text{für } m>3 \end{cases}$$

$$h_{1/2}(2^m) = \begin{cases} \frac{-3}{4} & \text{für } m=1 \\ \frac{1}{12} & \text{für } m=3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h_{2/3}(2^m) = \begin{cases} \frac{-2}{3} & \text{für } m=1 \\ \frac{-1}{12} & \text{für } m=2 \\ \frac{1}{12} & \text{für } m=3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir verwenden nun Lemma 4.4.2 und Lemma 4.4.3 und bekommen die Konstanten. □

Lemma 4.4.9. *Sei $f_5(n)$ wie in (4.5). Dann gilt für alle $y \geq \exp(18)$*

$$\sum_{500<n\leq y}\mu^2(n)f_5(n)\kappa(3/5,n)\left(\frac{1}{2}\log\frac{y}{n}+1.9709\right) = 0.514y\log y+2.0823y.$$

Beweis. Wie in den vorigen Lemmata berechnen wir zunächst $h(n)$, sodass

$$\sum_n\frac{\mu^2(n)\kappa(3/5,n)f_5(n)}{n^{s+1}} = \zeta^2(s+1)\sum_n\frac{h(n)}{n^s}$$

Hierzu betrachten wir das Eulerprodukt

$$\prod_{p>2}\left(1+\frac{2p-3}{p(p-1)}\frac{p^2}{1+p(p-1)}\frac{1}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p}\frac{1}{p^s}\right)^2 =$$

$$\prod_{p>2}\left(1+\frac{2p-3}{p(p-1)}\frac{p^2}{1+p(p-1)}\frac{1}{p^s}-\frac{2}{p}\frac{1}{p^s}-\frac{4p-6}{(p-1)(1+p(p-1))}\frac{1}{p^{2s}}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{p^2}\frac{1}{p^{2s}}+\frac{2p-3}{p(p-1)(1+p(p-1))}\frac{1}{p^{3s}}\right)=$$
$$\prod_{p>2}\left(1+\frac{p^2-4p+2}{p(p-1)(1+p(p-1))}\frac{1}{p^s}-\frac{-(3p^3-4p^2-2p+1)}{p^2(p-1)(1+p(p-1))}\frac{1}{p^{2s}}+\right.$$
$$\left.\frac{2p-3}{p(p-1)(1+p(p-1))}\frac{1}{p^{3s}}\right)$$

und

$$\left(1+\frac{2}{5}\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{2^s}\right)^2 = 1-\frac{3}{5}\frac{1}{2^s}-\frac{3}{20}\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{10}\frac{1}{2^{3s}}$$

Daraus folgt für $h(n)$

$$h(p^m)=\begin{cases}\frac{p^2-4p+2}{p(p-1)(1+p(p-1))} & \text{für } m=1\\ \frac{-(3p^3-4p^2-2p+1)}{p^2(p-1)(1+p(p-1))} & \text{für } m=2\\ \frac{2p-3}{p(p-1)(1+p(p-1))} & \text{für } m=3\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$h(2^m)=\begin{cases}-\frac{3}{5} & \text{für } m=1\\ -\frac{3}{20} & \text{für } m=2\\ \frac{1}{10} & \text{für } m=3\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Mit Hilfe von Lemma 4.4.2 können wir nun

$$\sum_{n\le y}\mu^2(n)\kappa(3/5,n)f_5(n)=k_6 y\log y+k_7 y+k_8+O^*(95.1y^{2/3})$$

berechnen und erhalten

$0.207 \le k_6 \le 0.208$
$0.623 \le k_7 \le 0.625$
$0.004 \le k_8 \le 0.005$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\sum_{n\le y}\mu^2(n)f_5(n)\kappa(3/5,n)\log\frac{y}{n} =$$
$$\int_1^y \left[k_6\log t + k_7 + \frac{k_8}{t} + O^*(94.5t^{-1/3})\right]dt =$$
$$= k_6 y\log y + (k_7-k_6)y + k_8\log y + (k_6-k_7) + O^*\left(\frac{3}{2}95.1(y^{2/3}-1)\right)$$

Einfache numerische Berechnungen zeigen uns auch, dass

1. $\sum_{n\le 500}\mu^2(n)f_5(n)\kappa(3/5,n)\left(\log\frac{y}{n}+1.9709\right) \ge 289\log y - 818.9 + 0.5k_8\log y$,
2. $0.5(k_7-k_6)+1.9709k_7 \le 1.445$ und
3. $1.9709k_8 + 1.4709(k_6-k_7) \le 0$

Wenn wir nun alles zusammentragen, können wir das Gewünschte ohne Probleme zeigen

$$\sum_{500<n\le y}\mu^2(n)f_5(n)\kappa(3/5,n)\left(\log\frac{y}{n}+1.9709\right) \le$$
$$\le 0.514y\log y + 1.445y + 259y^{2/3} - 289\log y + 818.9 \le$$
$$\le 0.514y\log y + 2.0823y$$

Für die letzte Zeile betrachten wir:

$$a = \frac{1.445y + 259y^{2/3} - 289\log y + 818.9}{y}$$

a wird kleiner wenn y wächst, daher können wir $y = exp(18)$ setzen und erhalten als Maximum

$$\widehat{a} = 2.084451307055701$$

□

Lemma 4.4.10. *Für alle $Z>0$ gilt*

$$\sum_{Z<n}\frac{\mu^2(n)}{n\phi(n)} \le \frac{4}{Z} \quad \textit{und} \quad \sum_{\substack{Z<n\\(n,2)=1}}\frac{\mu^2(n)}{n\phi(n)} \le \frac{8}{3Z}$$

Beweis. Wir verwenden die Identität

$$\frac{1}{\phi(n)} = \frac{1}{n}\sum_{l|n}\frac{\mu^2(l)}{\phi(l)}$$

Damit können wir die Summe abschätzen und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\sum_{Z<n} \frac{\mu^2(n)}{n\phi(n)} &= \sum_{Z<n} \frac{\mu^2(n)}{n^2} \sum_{l|n} \frac{\mu^2(l)}{\phi(l)} = \\
&= \sum_{l} \frac{\mu^2(l)}{\phi(l)} \sum_{Z/l<m} \frac{\mu^2(lm)}{l^2m^2} \leq \\
&\leq \sum_{l} \frac{\mu^2(l)}{l^2\phi(l)} \sum_{Z/l<m} \frac{1}{m^2} \leq \\
&\leq \sum_{l} \frac{\mu^2(l)}{l^2\phi(l)} \int_{Z/l}^{\infty} \frac{dm}{m^2} = \\
&= \frac{2}{Z} \sum_{l} \frac{\mu^2(l)}{l\phi(l)} = \\
&= \frac{2}{Z} \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \leq \frac{4}{Z}
\end{aligned}
$$

Die zweite Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass der Faktor für $p = 2$ gleich $\frac{3}{2}$ ist und daher

$$
\sum_{\substack{Z<n \\ (n,2)=1}} \frac{\mu^2(n)}{n\phi(n)} \leq \frac{2}{Z} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \leq \frac{8}{3Z}
$$

□

Lemma 4.4.11.

$$
\sum_{\substack{X<N\leq 2X \\ r_2(N)\neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-1} \leq 0.7174\delta^{36/37}X \ \textit{und} \sum_{\substack{X<N\leq 2X \\ r_2(N)\neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-2} \leq 0.5159\delta^{18/19}X.
$$

Beweis. In diesem Fall interessieren wir uns für eine Abschätzung der Reihe

$$
\sum_{\substack{X<N\leq 2X \\ N\in\mathcal{A}}} \mathfrak{S}_2^{-a}(N)
$$

mit $a = 1$ oder 2 und $\mathcal{A} = \{p + q \mid p \text{ und } q \text{ prim}\}$. Wir setzen $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap]X, 2X]$ und mit Hölders Ungleichung erhalten wir für ein $\sigma \geq 1$:

$$
\sum_{N\in\mathcal{B}} \mathfrak{S}_2^{-a}(N) \leq |\mathcal{B}|^{1-1/\sigma} \mathfrak{S}_2^{-a} \left(\sum_{X<N\leq 2X} \prod_{p|N} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{a\sigma} \right)^{1/\sigma}
$$

Wir setzen nun $g_b(N) = \prod_{p|N}\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^b$ für $b \geq 1$. Damit können wir wieder Lemma 4.4.2 anwenden. Dieses Mal ist $g_b(n)$ nicht quadratfrei. Wir berechnen nun mittels der Euler-Produkt-Darstellung

$$\begin{aligned}\sum_n h_b(n)n^{-s} &= \prod_p \left(1 + g_b(p)\left(p^{-s-1}\frac{1}{1-p^{-s-1}}\right)\right)\left(1-p^{-s-1}\right) = \\ &= \prod_p \left(1 - p^{-s-1} + g_b(p)\,p^{-s-1}\right)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $h_b(n)$

$$h_b(p^m) = \begin{cases} \frac{g_b(p)-1}{p} & \text{für } m = 1, \\ 0 & \text{für } m \geq 2. \end{cases}$$

Damit können wir nun Lemma 4.4.2 anwenden und erhalten

$$\sum_{X<N\leq 2X} g_{a\sigma}(N) = H_{a\sigma}(0)\,X + \mathcal{O}^*\left(2.27625\,X^{2/3}\left(1+2^{2/3}\right)\overline{H}_{a\sigma}(-1/3)\right)$$

Wir setzen nun für ersteres $a = 1$ und $\sigma = 37$ und für die zweite Abschätzung $a = 2$ und $\sigma = 19$. Dann erhalten wir das Gewünschte. □

4.5 Die Gewichte ω_d

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns auschließlich mit den Gewichten ω_d, die in (4.9) definiert wurden. Wie wir oben gesehen haben, hängt der Fehlerterm sehr stark von den ω_d ab. Deswegen werden wir in diesem Abschnitt gute Abschätzungen für diese finden. Wir möchten

$$0 \leq \mu(d)\phi(d)G(z)\omega_d \ll 1$$

zeigen. Dies wird uns nicht gelingen. Wir werden aber für kleine d eine asympthotische Formel für z verwenden. Für d die prim, 2 mal einer Primzahl oder 6 mal einer Primzahl sind, benutzen wir Lemma 4.5.4 um obiges zu zeigen. Bei allen anderen d sind wir gezwungen, die klassische Abschätzung $|\phi(d)G(z)\omega_d| \ll 3^{\nu(d)}$ zu verwenden.

4.5.1 Explizite Darstellung

Doch bevor wir damit beginnen, wollen wir die Gewichte ein wenig umschreiben, sodass klar wird, was von Bedeutung ist.

$$\begin{aligned}
G^2(z)\omega_d &= G^2(z) \sum_{\substack{d_1,d_2\\ d|[d_1,d_2]}} \frac{1}{[d_1,d_2]} \frac{\mu(d_1)\frac{d_1}{\phi(d_1)}G_{d_1}(z/d_1)}{G(z)} \frac{\mu(d_2)\frac{d_2}{\phi(d_2)}G_{d_2}(z/d_2)}{G(z)} = \\
&= \sum_{\substack{d_1,d_2\\ d|[d_1,d_2]}} \mu(d_1)\mu(d_2)(d_1,d_2)\frac{1}{\phi(d_1)}G_{d_1}(z/d_1)\frac{1}{\phi(d_2)}G_{d_2}(z/d_2) = \\
&= \sum_{\substack{d_1,d_2\\ d|[d_1,d_2]}} \mu(d_1)\mu(d_2)(d_1,d_2)\frac{1}{\phi(d_1)} \sum_{\substack{k\le z/d_1\\ (k,d_1)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\phi(k)} \frac{1}{\phi(d_2)} \sum_{\substack{l\le z/d_2\\ (l,d_1)=1}} \frac{\mu^2(l)}{\phi(l)} = \qquad (4.15)\\
&= \sum_{k\le z} \frac{\mu^2(k)}{\phi(k)} \sum_{l\le z} \frac{\mu^2(l)}{\phi(l)} \sum_{\substack{d_1|k\\ d_2|l\\ d|[d_1,d_2]}} \mu(d_1)\mu(d_2)(d_1,d_2) = \\
&= \sum_{k\le z} \frac{\mu^2(k)}{\phi(k)} \sum_{l\le z} \frac{\mu^2(l)}{\phi(l)} L(d,l,k)
\end{aligned}$$

Lemma 4.5.1. *Für alle positiven quadratfreien ganze Zahlen d,k und l gilt*

$$L(d,l,k) = \begin{cases} \mu(d)\mu((d,l,k))\phi([l,k]/d)\phi_2((d,l,k)) & \text{wenn } d \mid [l,k] \text{ und } l/(l,d) = k/(k,d), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Für $d \nmid [l,k]$ ist $L(d,l,k) = 0$, deswegen reicht es $d \mid [l,k]$ vorauszusetzen. Zuerst zeigen wir, dass L multiplikativ im folgenden Sinn ist.

$$L(d,l,k) = \prod_p L((d,p),(l,p),(k,p))$$

Hierzu führen wir die Funktionen

$$\tau(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \mid b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\tau_p(a,b) := \tau((a,p),(b,p))$$

ein. Des weiteren sei M eine ganze Zahl, die von l und k geteilt wird. Für quadratfreie $a, b \mid M$ haben wir

$$\tau(a,b) = \prod_{p|M} \tau_p(a,b)$$

Da nach Voraussetzung d,l und k quadratfrei sind, können wir $L(d,l,k)$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
L(d,l,k) &= \sum_{\substack{d_1|M\\d_2|M}} \mu(d_1)\mu(d_2)(d_1,d_2)\tau(d_1,k)\tau(d_2,l)\tau(d,[d_1,d_2]) = \\
&= \sum_{\substack{d_1|M\\d_2|M}} \prod_{p|M} \mu((d_1,p))\mu((d_2,p))((d_1,p),(d_2,p)) \prod_{p|M} \tau_p(d_1,k)\tau_p(d_2,l)\tau_p(d,[d_1,d_2]) = \\
&= \prod_{p|M} \left\{ \sum_{\substack{d_1|p\\d_2|p}} \mu((d_1,p))\mu((d_2,p))((d_1,p),(d_2,p))\tau_p(d_1,k)\tau_p(d_2,l)\tau_p(d,[d_1,d_2]) \right\}
\end{aligned}$$

Dadurch können wir in Anlehnung an τ_p ein $L_p(d,l,k) = L((d,p),(l,p),(k,p))$ definieren. Es genügt also die folgenden Fälle durchzugehen

- $p \mid d$, dann
  - $p \mid (l,k)$, dann ist $L_p(d,l,k) = L_p(p,p,p) = p-2$,
  - $p \mid l$ oder $p \mid k$ aber nicht $p \mid (l,k)$, dann ist oBdA. $L_p(d,l,k) = L_p(p,p,1) = -1$,
- $p \nmid d$, dann
  - $p \mid (l,k)$, dann ist $L_p(d,l,k) = L_p(1,p,p) = p-1$,
  - $p \mid l$ oder $p \mid k$ aber nicht $p \mid (l,k)$, dann ist oBdA. $L_p(d,l,k) = L_p(1,p,1) = 0$

Wir führen nun eine Substitution ein

$$\begin{aligned}
d &= d_1d_2d_3\\
l &= d_1d_3s, \text{ mit}(s,d) = 1\\
k &= d_2d_3t, \text{ mit}(t,d) = 1
\end{aligned}$$

Um nun $L(d,l,k)$ multiplikativ zu beschreiben, betrachten wir alle Fälle für die $L_p(d,l,k) \neq 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn nicht der letzte Fall eintritt. Das heißt aber nichts anderes als, dass

$$\frac{l}{d_1d_3} = \frac{k}{d_2d_3} \Rightarrow \frac{l}{(d,l)} = \frac{k}{(d,k)}$$

Dadurch ergibt sich folgende Formel:

$$L(d,l,k) = \phi_2((d,l,k))(\mu(d)\mu((d,l,k)))\phi([l,k]/d)$$

□

Wir verwenden die Darstellung aus Lemma 4.5.1 und setzen $d = d_1d_2d_3$. Damit erhalten wir:

Lemma 4.5.2. *Sei ω_d das Gewicht gegeben durch (4.9), dann gilt*

$$\omega_d = \frac{\mu(d)}{G^2(z)\phi(d)} \sum_{\substack{s\le zd^{-1/2}\\(s,d)=1}} \frac{\mu^2(s)}{\phi(s)} \sum_{\substack{d_1d_2d_3=d\\d_1d_3s\le z\\d_2d_3s\le z}} \mu(d_3)\frac{\phi_2(d_3)}{\phi(d_3)}.$$

Beweis.

$$G^2(z)\omega_d = \sum_{\substack{l\le z\\k\le z}} \frac{\mu^2(l)}{\phi(l)}\frac{\mu^2(k)}{\phi(k)}\mu(d)\mu((d,l,k))\phi([l,k]/d)\phi_2((d,l,k)) =$$

$$= \mu(d) \sum_{\substack{d_1d_2d_3=d\\d_1d_3s\le z\\d_2d_3s\le z\\(s,d)=1}} \frac{\mu^2(d_1d_3s)}{\phi(d_1d_3s)}\frac{\mu^2(d_2d_3s)}{\phi(d_2d_3s)}\mu(d_3)\phi(s)\phi_2(d_3) =$$

$$= \frac{\mu(d)}{\phi(d)} \sum_{\substack{d_1d_2d_3=d\\d_1d_3s\le z\\d_2d_3s\le z\\(s,d)=1}} \frac{\mu^2(s)}{\phi(s)}\mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3) =$$

$$= \frac{\mu(d)}{\phi(d)} \sum_{\substack{s\le zd^{-1/2}\\(s,d)=1}} \frac{\mu^2(s)}{\phi(s)} \sum_{\substack{d_1d_2d_3=d\\d_1d_3s\le z\\d_2d_3s\le z}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)$$

□

4.5.2 Die Asymptotik der ω_d

Nun können wir eine asymptotische Formel für die Gewichte ω_d bestimmen.

Lemma 4.5.3. *Für alle $z \ge 1$ und alle ganzen Zahlen d gilt*

$$G(z)\omega_d = \frac{\mu(d)}{\phi(d)}\left\{1 + \frac{u_d}{G(z)} + \mathcal{O}^*\left(\frac{7.466}{G(z)z^{1/3}}(1+f_6(d))\right)\right\},$$

mit

$$u_d = \frac{\phi(d)}{d}\sum_{tt'=d}\mu(t')\frac{\phi_2}{\phi}(t')\sum_{\substack{k|t\\k\ge\sqrt{t}}}\log\frac{t}{k^2},$$

und

$$f_6(d) = f_1(d)\sum_{d_1d_2d_3=d}\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\max(d_1,d_2)^{1/3}d_3^{1/3},$$

mit f_1 wie in Lemma 4.4.4.

Beweis. Nach Lemma 4.5.2 haben wir

$$\mu(d)\phi(d)G^2(z)\omega_d = \sum_{\substack{s\le zd^{-1/2}\\(s,d)=1}} \frac{\mu^2(s)}{\phi(s)} \sum_{\substack{d_1d_2d_3=d\\ d_1d_3s\le z\\ d_2d_3s\le z}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3) =$$

$$= \sum_{d_1d_2d_3=d} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)G_d(\min(\frac{z}{d_1d_3},\frac{z}{d_2d_3}))$$

Mittels Lemma 4.4.4 können wir dann umformen

$$G_d\left(\frac{z}{d_3\max(d_1,d_2)}\right) = \frac{\phi(d)}{d}\left\{\log\left(\frac{z}{d_3\max(d_1,d_2)}\right)+\gamma+\sum_p\frac{\log p}{p(p-1)}+\sum_{p|d}\frac{\log p}{p}\right\}+$$

$$+O^*\left\{8.2\cdot 0.9105\left(\frac{z}{d_3\max(d_1,d_2)}\right)^{-1/3}f_1(d)\right\}$$

Wir betrachten nun den Hauptterm genauer und erkennen

$$\sum_{d_1d_2d_3=d}\mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3) = \sum_{n|d}\mu(n)\frac{\phi_2}{\phi}(n)2^{\nu(d/n)} =$$

$$= 2^{\nu(d)}\sum_{n|d}\mu(n)\frac{\phi_2(n)}{\phi(n)2^{\nu(n)}} =$$

$$= 2^{\nu(d)}\prod_{p|d}\left(1-\frac{p-2}{2(p-1)}\right) =$$

$$= 2^{\nu(d)}\prod_{p|d}\frac{p}{2(p-1)} =$$

$$= \prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{d}{\phi(d)}$$

Nun können wir den Ausdruck innerhalb der geschwungenen Klammern vereinfachen:

$$\sum_{d_1d_2d_3=d}\mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)(-\log(d_3\max(d_1,d_2))) + \frac{d}{\phi(d)}\sum_{p|d}\frac{\log p}{p} =$$

$$\sum_{\substack{d_3|n|d\\ n^2\ge dd_3}}\mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{1}{n} + \sum_{\substack{d_3|n|d\\ n^2<dd_3}}\mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{n}{dd_3} + \frac{d}{\phi(d)}\sum_{p|d}\frac{\log p}{p} =$$

$$\sum_{\substack{d_3|n|d\\ n^2\ge dd_3}}\mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{dd_3}{n^2} - \frac{d}{\phi(d)}\log d + \sum_{d_3|d}\mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\sum_{d_3|n|d}\log\frac{n}{d_3} + \frac{d}{\phi(d)}\sum_{p|d}\frac{\log p}{p} =$$

$$\sum_{\substack{d_3|n|d\\n^2\geq dd_3}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{dd_3}{n^2} - \frac{d}{\phi(d)}\log d + \sum_{d_3|d}\mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\sum_{m|\frac{d}{d_3}}\log m + \frac{d}{\phi(d)}\sum_{p|d}\frac{\log p}{p} =$$

$$\sum_{\substack{d_3|n|d\\n^2\geq dd_3}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{dd_3}{n^2} - \frac{d}{\phi(d)}\log d + \sum_{m|d}\log m\sum_{d_3|\frac{d}{m}}\mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3) + \frac{d}{\phi(d)}\sum_{p|d}\frac{\log p}{p} =$$

$$\sum_{\substack{d_3|n|d\\n^2\geq dd_3}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{dd_3}{n^2} - \frac{d}{\phi(d)}\log d + \sum_{m|d}\log m\prod_{p|\frac{d}{m}}\left(\frac{1}{p-1}\right) + \frac{d}{\phi(d)}\sum_{p|d}\frac{\log p}{p} =$$

$$\sum_{\substack{d_3|n|d\\n^2\geq dd_3}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{dd_3}{n^2} - \frac{d}{\phi(d)}\log d + \frac{1}{\phi(d)}\sum_{m|d}\phi(m)\log m + \frac{d}{\phi(d)}\sum_{p|d}\frac{\log p}{p} =$$

$$\sum_{\substack{d_3|n|d\\n^2\geq dd_3}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{dd_3}{n^2} + \frac{d}{\phi(d)}\left(\sum_{p|d}\frac{(p-1)\log p}{d}\sum_{m|\frac{d}{p}}\phi(m) + \sum_{p|d}\frac{\log p}{p} - \log d\right) =$$

$$\sum_{\substack{d_3|n|d\\n^2\geq dd_3}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{dd_3}{n^2} + \frac{d}{\phi(d)}\left(\sum_{p|d}\frac{(p-1)\log p}{d}\frac{d}{p} - \sum_{p|d}\frac{(p-1)\log p}{p}\right) =$$

$$\sum_{\substack{d_3|n|d\\n^2\geq dd_3}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3)\log\frac{dd_3}{n^2}$$

□

4.5.3 Eine wichtige Abschätzung

Lemma 4.5.4. *Sei p eine Primzahl. Wenn $d = p$, $d = 2p$ oder $d = 6p$ mit $p \geq 7$ prim, dann gilt für alle $z \geq 1$*

$$0 \leq \mu(d)\phi(d)G(z)\omega_d \leq 1$$

Beweis. Wir betrachten die 3 Fälle getrennt:

- d **ist prim:** Sei $p = d$. Dann folgt aus $s \leq z/p$, dass die innere Summe in Lemma 4.2 gleich

$$\sum_{\substack{d_1d_2d_3=p\\d_1d_3\leq p\\d_2d_3\leq p}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3) = 1 + 1 - \frac{p-2}{p-1} = \frac{p}{p-1}$$

ist und somit für ω_d

$$\omega_d = \frac{\mu(d)}{G^2(z)\phi(d)} \sum_{\substack{s \le z/d \\ (s,d)=1}} \frac{\mu^2(s)}{\phi(s)} \frac{d}{\phi(d)} = \frac{1}{G(z)\phi(d)} \mu(d) \frac{\frac{d}{\phi(d)} G_d(z/d)}{G(z)} = \frac{\lambda_d}{G(z)\phi(d)}$$

Daraus folgt mit der wohlbekannten Ungleichung $0 \le \mu(d)\lambda_d \le 1$ das Gewünschte.

- $d = 2p$ **mit** $p > 2$**:** Aus $s \le z/2p$ folgt für die innere Summe

$$\sum_{\substack{d_1 d_2 d_3 = 2p \\ d_1 d_3 \le 2p \\ d_2 d_3 \le 2p}} \mu(d_3) \frac{\phi_2}{\phi}(d_3) = 1 + 1 - \frac{p-2}{p-1} + 1 + 1 - \frac{p-2}{p-1} = \frac{2p}{p-1} = \frac{2p}{\phi(2p)}$$

und für $z/(2p) < s \le z/p$ folgt für die innere Summe

$$\sum_{\substack{d_1 d_2 d_3 = 2p \\ d_1 d_3 \le p \\ d_2 d_3 \le p}} \mu(d_3) \frac{\phi_2}{\phi}(d_3) = 1 + 1 = 2$$

Also folgt mit Hilfe von Lemma 4.5.2:

$$G^2(z)\omega_{2p} = \frac{\mu(2p)}{\phi(2p)} \left\{ \frac{2p}{\phi(2p)} G_{2p}\left(\frac{z}{2p}\right) + 2\left(G_{2p}\left(\frac{z}{p}\right) - G_{2p}\left(\frac{z}{2p}\right)\right)\right\}$$

Aber wir wissen, dass

$$\begin{aligned} G(z) &= G_{2p}(z) + \frac{1}{\phi(2)} G_{2p}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{\phi(p)} G_{2p}\left(\frac{z}{p}\right) + \frac{1}{\phi(2p)} G_{2p}\left(\frac{z}{2p}\right) \ge \\ &\ge \frac{2p}{\phi(2p)} G_{2p}\left(\frac{z}{2p}\right) + \left(1 + \frac{1}{\phi(2)} + \frac{1}{\phi(p)}\right)\left(G_{2p}\left(\frac{z}{p}\right) - G_{2p}\left(\frac{z}{2p}\right)\right) > \\ &> \frac{2p}{\phi(2p)} G_{2p}\left(\frac{z}{2p}\right) + 2\left(G_{2p}\left(\frac{z}{p}\right) - G_{2p}\left(\frac{z}{2p}\right)\right) \end{aligned}$$

Damit folgt mit oben

$$G^2(z)\omega_d < \frac{\mu(d)}{\phi(d)} G(z) \Rightarrow \mu(d)\phi(d)G(z)\omega_d < 1$$

- $d = 6p$ **mit** $p \ge 7$**:** Dann hat d die Teiler 1,2,3,6,p,$2p$,$3p$,$6p$. Man beachte, dass hierzu die Voraussetzung $p \ge 7$ von Nöten ist. Wie vorhin unterscheiden wir die Fälle $s \le z/6p$ mit

$$\sum_{\substack{d_1 d_2 d_3 = 6p \\ d_1 d_3 \le 6p \\ d_2 d_3 \le 6p}} \mu(d_3) \frac{\phi_2}{\phi}(d_3) = 8 + 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{p-2}{p-1}\right) + 2\left(\frac{p-2}{2p-2})\right) = \frac{6p}{2p-2} = \frac{6p}{\phi(6p)}$$

und für $z/6p < s \le z/3p$ erhalten wir

$$\sum_{\substack{d_1d_2d_3=6p\\ d_1d_3\le 3p\\ d_2d_3\le 3p}} \mu(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3) = 6+2\left(-\frac{1}{2}-\frac{p-2}{p-1}\right) = \frac{6p-6+4}{2p-2} = 3+\frac{2}{p-1}$$

Außerdem haben wir für $G(z)$ ähnlich wie oben folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} G(z) &\ge \frac{6p}{\phi(6p)}G_{6p}\left(\frac{z}{6p}\right)+\left(\frac{6p}{\phi(6p)}-\frac{1}{\phi(6p)}\right)\left(G_{6p}\left(\frac{z}{3p}\right)-G_{6p}\left(\frac{z}{6p}\right)\right) > \\ &> \frac{6p}{\phi(6p)}G_{6p}\left(\frac{z}{6p}\right)+\left(3+\frac{2}{p-1}\right)\left(G_{6p}\left(\frac{z}{3p}\right)-G_{6p}\left(\frac{z}{6p}\right)\right) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für ω_d

$$\begin{aligned} G^2(z)\omega_{6p} &= \frac{\mu(6p)}{\phi(6p)}\left\{\frac{6p}{\phi(6p)}G_{6p}\left(\frac{z}{6p}\right)+\left(3+\frac{2}{p-1}\right)\left(G_{6p}\left(\frac{z}{3p}\right)-G_{6p}\left(\frac{z}{6p}\right)\right)\right\} \\ &< \frac{\mu(6p)}{\phi(6p)}G(z) \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\mu(6p)\phi(6p)G(z)\omega_{6p} < 1$$

□

4.5.4 Obere Abschätzungen

Lemma 4.5.5. *Für alle $z \ge 1$ und alle positiven ganzen Zahlen d gilt*

$$|G(z)\omega_d| \le \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)}\prod_{p|d}\frac{3p-4}{p(p-1} \le \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)}\frac{30.31}{d^{7/10}}.$$

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 4.5.2 haben wir

$$\begin{aligned} |G(z)\omega_d| &\le \frac{1}{G(z)\phi(d)}G_d(z/\sqrt{d})\sum_{d_1d_2d_3=d}\mu^2(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3) \le \\ &\le \frac{1}{G(z)\phi(d)}\frac{\phi(d)}{d}G(z\sqrt{d})\sum_{d_1d_2d_3=d}\mu^2(d_3)\frac{\phi_2}{\phi}(d_3) = \\ &= \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)}\frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+1+\frac{p-2}{p-1}\right) = \\ &= \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)}\prod_{p|d}\left(\frac{3p-4}{p(p-1)}\right) \end{aligned}$$

Wie man leicht nachrechnet ist die Funktion $p \mapsto \frac{3p-4}{(p-1)p^{0.3}}$ kleiner als 1 für $p \geq 41$. Dadurch ergibt sich die zweite Abschätzung

$$
\begin{aligned}
|G(z)\omega_d| &\leq \frac{1}{G(z)\phi(d)} G_d(z/\sqrt{d}) \sum_{d_1 d_2 d_3 = d} \mu^2(d_3) \frac{\phi_2}{\phi}(d_3) \leq \\
&= \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)} \prod_{p|d} \left(\frac{3p-4}{p(p-1)} \right) \leq \\
&\leq \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)} \frac{1}{d^{7/10}} \prod_{41 > p|d} \left(\frac{3p-4}{p^{0.3}(p-1)} \right) = \\
&= \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)} \frac{30.31}{d^{7/10}}
\end{aligned}
$$

□

Lemma 4.5.6. *Für alle $z \geq 1$ und jede positive ganze Zahl d gilt*

$$
|G(z)\omega_d| \leq \frac{G_d(z/\sqrt{d})}{G(z)} \sum_{\substack{lmn=d \\ l \leq z, mn \leq z}} \frac{\xi(l)}{\phi(l)} \frac{1}{m\phi(m)} \frac{1}{n} \leq \frac{G_d(z/\sqrt{d})}{G(z)} \sum_{\substack{l|d \\ z/d \leq l \leq z}} \xi(l)
$$

Beweis. Hier verwenden wir wie zuvor Lemma 4.5.2 und erhalten

$$
\begin{aligned}
|G(z)\omega_d| &\leq \frac{1}{G(z)\phi(d)} G_d(z/\sqrt{d}) \sum_{\substack{lk=d \\ l \leq z, k \leq z}} \mu^2(l) \frac{\phi_2}{\phi}(l) \leq \\
&= \frac{G_d(z/\sqrt{d})}{G(z)} \sum_{\substack{lk=d \\ l \leq z, k \leq z}} \frac{1}{\phi(lk)} \prod_{p|l} \left(1 + \frac{p-2}{p-1} \right) = \\
&= \frac{G_d(z/\sqrt{d})}{G(z)} \sum_{\substack{lk=d \\ l \leq z, k \leq z}} \frac{\xi(l)}{\phi(l)\phi(k)} = \\
&= \frac{G_d(z/\sqrt{d})}{G(z)} \sum_{\substack{lk=d \\ l \leq z, k \leq z}} \frac{\xi(l)}{k\phi(l)} \sum_{mn=k} \frac{\mu^2(m)}{\phi(m)} \leq \\
&\leq \frac{G_d(z/\sqrt{d})}{G(z)} \sum_{\substack{lmn=d \\ l \leq z, mn \leq z}} \frac{\xi(l)}{mn\phi(l)} \frac{1}{\phi(m)}
\end{aligned}
$$

Wie vorhin verwenden wir auch hier Lemma 4.4.1 um den zweien Teil der Abschätzung zu bekommen

$$
\begin{aligned}
|G(z)\omega_d| &\leq \frac{G_d(z/\sqrt{d})}{G(z)} \sum_{\substack{lmn=d \\ l\leq z, mn\leq z}} \frac{\xi(l)}{mn\phi(l)} \frac{1}{\phi(m)} \\
&\leq \frac{\phi(d)}{d} \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)} \sum_{\substack{lmn=d \\ l\leq z}} \frac{\xi(l)}{mn\phi(lm)} \leq \\
&\leq \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)d} \sum_{\substack{lmn=d \\ l\leq z}} \frac{\xi(l)\phi(n)}{mn} \leq \\
&\leq \frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)d} \sum_{\substack{l|d \\ z/d\leq l\leq z}} \xi(l)
\end{aligned}
$$

□

4.5.5 Numerische Abschätzungen

Nachdem wir nun genügend allgemeine Abschätzungen bewiesen haben, wollen wir an dieser Stelle mit den numerischen Berechnungen beginnen. Hierzu seien

$$
\begin{aligned}
&z \text{ eine reelle Zahl } \geq \exp(30), \\
&\lambda \text{ eine reelle Zahl mit } \log\lambda \leq \frac{39}{50}\log z \text{ und} \\
&q \text{ eine quadratfreie ungerade ganze Zahl}
\end{aligned}
$$

im ganzen restlichen Abschnitt. Damit wollen wir in erster Linie die Summe

$$
t(q) = q \sum_{\substack{d\leq\lambda \\ d\equiv 0 \bmod q}} \frac{|G(z)\omega_d|^2}{\phi(d)} \tag{4.16}
$$

abschätzen. Doch bevor wir uns darauf stürzen, wollen wir noch unsere Hypothese betrachten, die wir eingangs getroffen haben. Wir wollten zeigen, dass $|G(z)\phi(d)\omega_d| \leq 1$ ist. Bisher haben wir nur gesehen, dass dies beinahe der Fall ist. Diesen Fehler wollen wir uns jetzt kurz anschauen:

Lemma 4.5.7. *Sei*

$$
\Delta_k(x) = \sum_{\substack{d\leq x \\ \nu(d)=k}} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \max(|G(z)\omega_d|^2 - \frac{1}{\phi^2(d)}, 0).
$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(50000) = \Delta_3(50000) = \Delta_6(50000) = 0,\\
&\Delta_2(50000) \leq 1.02 \cdot 10^{-16}\\
&\Delta_4(50000) \leq 1.54 \cdot 10^{-12}\\
&\Delta_5(50000) \leq 1.14 \cdot 10^{-13}
\end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis ist rein numerisch und erfolgt mit Hilfe von Lemma 4.5.3. □

Bevor wir die ersten asympthotischen Abschätzungen machen, brauchen wir noch eine wichtige Konstante

$$c_3 = \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{f_2(p)}{p}\right) \leq 3.027251641.$$

Diese hilft uns die folgenden Abschätzungen zu machen.

Lemma 4.5.8. *Es gilt*

$$t(q) \leq (1.43903)^2 c_3 f_3(q) \tag{4.17}$$

und

$$t(q) \leq 2.301 f_4(q) + 2 \cdot 10^{-12} q + (1.43903)^2 f_3(q) \left(c_3 - \sum_{d \leq 50000/q} \mu^2(d) f_2(d)/d\right). \tag{4.18}$$

Dabei ist $f_2(n)$ wie in (4.2)*, $f_3(n)$ wie in* (4.3) *und $f_4(n)$ wie in* (4.4)*.*

Beweis. Mittels Lemma 4.4.5 haben wir

$$\frac{G(z\sqrt{d})}{G(z)} \leq \frac{\log z\sqrt{d} + 1.4709}{\log z + 1.06} \leq 1 + \frac{\sqrt{d} + 1.4709}{\log z} \leq 1 + \frac{\frac{39}{50}\log z + 1.4709}{\log z} \leq 1.43903$$

Dies ermöglicht uns folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
t(q) \leq q &\sum_{\substack{d \leq A\\ d \equiv 0 \bmod q}} \frac{|G(z)\omega_d|^2}{\phi(d)}\\
&+ q\Big(\sum_{d \equiv 0 \bmod q} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \left(1.43903 \prod_{p|d} \frac{3p-4}{p(p-1)}\right)^2\\
&- \sum_{\substack{d \leq A\\ d \equiv 0 \bmod q}} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \left(1.43903 \prod_{p|d} \frac{3p-4}{p(p-1)}\right)^2 \Big) =
\end{aligned}$$

$$= q \sum_{\substack{d \le A \\ d \equiv 0 \bmod q}} \frac{|G(z)\omega_d|^2}{\phi(d)} + (1.43903)^2 f_3(q) \left(c_3 - \prod_{p|q} \left(1 + \frac{f_2(p)}{p}\right) \sum_{\substack{d \le A/q \\ (d,q)=1}} \mu^2(d) \frac{f_2(d)}{d} \right)$$

Für die erste Abschätzung wählen wir $A < 1$. Für die zweite sei $A = 50000$, dann erhalten wir

$$\sum_{\substack{d \le 50000 \\ d \equiv 0 \bmod q}} \frac{|G(z)\omega_d|^2}{\phi(d)} \le \sum_{d \equiv 0 \bmod q} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)^3} + \sum_{d \le 50000} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \max(0, |G(z)\omega_d|^2 - \frac{1}{\phi(d)^2})$$

und

$$c_3 - \prod_{p|q} \left(1 + \frac{f_2(p)}{p}\right) \sum_{\substack{d \le 50000/q \\ (d,q)=1}} \mu^2(d) \frac{f_2(d)}{d} \le c_3 - \sum_{d \le 50000/q} \mu^2(d) \frac{f_2(d)}{d}$$

Außerdem erhält man mit einer einfachen Berechnung

$$\begin{aligned} q \sum_{d \equiv 0 \bmod q} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)^3} &= q \prod_{p|q} \frac{1}{(p-1)^3} \prod_{p \nmid q} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) = \\ &= q \prod_{p|q} \frac{\frac{1}{(p-1)^3}}{\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)} \sum_{d \ge 1} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)^3} = \\ &= \prod_{p|q} \frac{1}{p^2 - 3p + 3} \sum_{d \ge 1} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)^3} \le 2.301 \cdot f_4(q) \end{aligned}$$

Das zusammen mit Lemma 4.5.7 liefert die zweite Abschätzung. □

Lemma 4.5.9. *Wenn $\phi(q) \ge 61$ und $q \le 3000$, dann ist $t(q) \le 0.001$.*

Beweis. Sei $q \le 3000$, dann liefert uns eine direkte Berechnung für $q > 285$

$$c_3 - \sum_{d \le 50000/q} \mu^2(d) \frac{f_2(d)}{d} \le 0.08955.$$

Für die restlichen q bekommen wir sogar eine Abschätzung mit 0.00341. Daraus ergibt sich mittels Lemma 4.5.8 das Gewüschte. □

Lemma 4.5.10. *1. Für $q \ge 233$ gilt $t(q) \le 0.0003$.*

2. Wenn $\phi(q) \le 61$ ist, dann gilt $t(q) \le 0.0008$.

3.

$$t(1) - \sum_{\substack{d \le 2000 \\ (d,2)=1}} \frac{G^2(z)(|\omega_d|^2 + |\omega_{2d}|^2)}{\phi(d)} \le 0.0000009.$$

Beweis. Da $f_3(p)p^{1.25} \leq 1$ für $p \geq 23$ ist, bekommen wir mit (4.17), dass

$$t(q) \leq (1.43903)^2 \cdot 3.0273 \cdot \frac{38.1}{q^{1.25}} \leq \frac{239}{q^{1.25}}.$$

Das liefert sofort:

$$t(q) \leq 0.003 \text{ für } q \geq 52605$$

Der Rest folgt indem wir alle restlichen quadratfreien ungeraden q in (4.18) einsetzten. Der zweite Teil folgt direkt daraus, dass

$$\max_{\substack{q \leq 231 \\ \phi(q) \geq 61}} t(q) \leq t(170) \leq 0.000766896$$

ist.
Für den dritten Teil sei $\mathcal{F} = \{d \text{ ungerade}, d \leq 2000\} \cup \{2d, d \text{ ungerade}, d \leq 2000\}$, dann ist

$$\sum_{\substack{d \leq \lambda \\ d \notin \mathcal{F}}} \frac{|G(z)\omega_d|^2}{\phi(d)} \leq \sum_{d \notin \mathcal{F}} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)^3} + \sum_{d \leq 50000} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \max\left(0, |G(z)\omega_d|^2 - \frac{1}{\phi(d)}\right)$$
$$+ (1.43903)^2 \left(c_3 - \sum_{d \leq 50000} \mu^2(d) \frac{f_2(d)}{d}\right).$$

□

Lemma 4.5.11.

$$A(t) = \sum_{\substack{m|t \\ m < \sqrt{t}}} \log\left(\frac{m^2}{t}\right) = -2^{\nu(t)-1} \log t + 2 \log \left(\prod_{\substack{m|t \\ m < \sqrt{t}}}\right) \leq 0$$

mit

$$\begin{aligned}
A(1) &= 0 \\
A(p) &= -\log p \\
A(pq) &= -2 \log q \ \textit{wenn } p < q \\
A(pqr) &= \begin{cases} -2 \log pqr & \textit{wenn } p < q < r < pq \\ -4 \log r & \textit{wenn } p < q < pq < r \end{cases} \\
A(pqrs) &= \begin{cases} -8 \log s & \textit{wenn } p < q < r < pqr < s \\ -8 \log pqrs + 2 \log(p^3 q^3 r^3 s) & \textit{wenn } p < q < r < s < pqr \textit{ und } qr < ps \\ -4 \log qrs & \textit{wenn } p < q < r < s < ps < qr \end{cases}
\end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis folgt durch Einsetzen der Bedingungen auf beiden Seiten. □

4.6 Eine untere Abschätzung

Betrachten wir Satz 4.2 einmal aus folgendem Blickwinkel, dass im Intervall $]X, 2X]$ rund $X/2$ gerade Zahlen sind. Dann sagt uns die Goldbach'sche Vermutung, dass unsere gesuchte Größe $X/2$ sein sollte. Zum Vergleich gelang es Riesel & Vaughan nur $X/(2 \cdot 9)$ zu zeigen (siehe [23]).
Wir folgen hier im Großen und Ganzen einer Idee von Shapiro & Warga (siehe [29]) und betrachten

$$\mathcal{R} = \sum_{N \in]X,2X]} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) r_2(N).$$

Zuerst werden wir diese Summe nach unten abschätzen.

Proposition 4.1. *Es gilt*

$$\sum_{N \in]X,2X]} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) r_2(N) \geq 0.478 \frac{X^2}{\log X}$$

für $X \geq \exp(67)$.

Beweis. Aus der Definition von $\mathcal{R}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{N \in]X,2X]} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) \left(\sum_{\substack{p_1+p_2=N \\ p_1 \leq X}} \log p_1 - \sum_{\substack{p_1+p_2=N \\ p_1 \leq X \\ p_2 < \sqrt{X}}} \log p_1 \right) = \\ &= \sum_{N \in]X,2X]} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) \left(\sum_{\substack{p_1+p_2=N \\ p_1 \leq X}} \log p_1 \right) + \mathcal{O}^*(\sqrt{X} \log X) \end{aligned}$$

Wir bekommen nun die untere Schranke indem wir die arithmetische Summe als Faltungsprodukt sehen. Also haben wir mit Hilfe von (4.10)

$$\begin{aligned} \mathcal{R} + \mathcal{O}^*(\sqrt{X} \log X) &\geq \sum_{N \in]X,2X]} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) \left(\sum_{\substack{p_1+p_2=N \\ p_1 \leq X}} \log p_1 \frac{\log p_2}{\log 2X} \right) = \\ &= \mathfrak{S}_2^{-1} \sum_{N \in]X,2X]} \left(\prod_{\substack{p \mid N \\ p \neq 2}} \frac{p-2}{p-1} \right) \left(\sum_{\substack{p_1+p_2=N \\ p_1 \leq X}} \log p_1 \frac{\log p_2}{\log 2X} \right) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathfrak{S}_2^{-1} \sum_{N\in]X,2X]} \sum_{\substack{d|N\\(d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\phi(d)} \sum_{\substack{p_1+p_2=N\\p_1\leq X}} \log p_1 \frac{\log p_2}{\log 2X} = \\
&= \mathfrak{S}_2^{-1} \sum_{\substack{d\leq 2X\\(d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\phi(d)} \sum_{\substack{N\in]X,2X]\\N\equiv 0 \bmod 2d}} \sum_{\substack{p_1+p_2=N\\p_1\leq X}} \log p_1 \frac{\log p_2}{\log 2X} \geq \\
&\geq \mathfrak{S}_2^{-1} \sum_{\substack{d\leq 2X\\(d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\phi(d)} \left(B_d(X) + \mathcal{O}^*(C_d(X))\right)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
B_d(X) &= \sum_{\substack{N\in]X,2X]\\N\equiv 0 \bmod 2d}} \sum_{\substack{p_1+p_2=N\\p_1\leq X\\(p_1p_2,d)=1}} \log p_1 \frac{\log p_2}{\log 2X} = \\
&= \sum_{a \bmod^* d} \left(\sum_{\substack{p_1\equiv a \bmod d\\p_1\leq X}} \log p_1 \sum_{\substack{p_2\equiv -a \bmod d\\X-p_1<p_2\leq 2X-p_1}} \frac{\log p_2}{\log 2X} \right)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

□

und

$$
C_d(X) = \begin{cases} \frac{\log^2 d}{\log 2X} & \text{für } d \text{ prim} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

Wir betrachten nun $B_d(X)$ in Abhängigkeit von d. Hierzu teilen wir den Bereich in vier Teile

- **für kleine d:** Hier betrachten wir nur d die in $\mathcal{D}$ liegen. Für diese haben wir

$$
\begin{aligned}
B_d(X) &= \frac{1}{\log 2X} \sum_{a \bmod^* d} \left(\sum_{\substack{p_1\equiv a \bmod d\\p_1\leq X}} \log p_1 \left(\theta(2X-p_1;d,-a) - \theta(X-p_1;d,-a)\right) \right) = \\
&= \frac{1}{\log 2X} \sum_{a \bmod^* d} \left(\sum_{\substack{p_1\equiv a \bmod d\\p_1\leq X}} \log p_1 \left(\frac{2X-p_1}{\phi(d)} - \frac{X-p_1}{\phi(d)} + \mathcal{O}^*(3\varepsilon_d)\frac{X}{\phi(d)} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\log 2X} \sum_{a \bmod^* d} \left(\sum_{\substack{p_1\equiv a \bmod d\\p_1\leq X}} \log p_1 \frac{X}{\phi(d)} \left(1 + \mathcal{O}^*(3\varepsilon_d)\right) \right) =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1+\mathcal{O}^*(3\varepsilon_d)}{\phi(d)} \frac{X}{\log 2X} \sum_{a \bmod^* d} \theta(X;d,a) =$$
$$= \frac{1+\mathcal{O}^*(3\varepsilon_d)}{\phi(d)} \frac{X\theta(X)}{\log 2X}$$

und somit

$$\mathfrak{S}_2^{-1} \sum_{d\in\mathcal{D}} \frac{\mu(d)}{\phi^2(d)} (1+\mathcal{O}^*(3\varepsilon_d)) \frac{\log X}{\log 2X} \geq \frac{0.66025 - 0.00369}{1.320323} \cdot 0.9897 \geq 0.4921$$

- **für** $d \leq 4000$**:** Wir verwenden die Brun-Titschmarch Ungleichung von Montgomery & Vaughan (siehe [15]) und erhalten

$$\mathfrak{S}_2^{-1} \sum_{\substack{d\leq 4000\\ d\notin\mathcal{D}\\ (d,2)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} B_d(X) \leq$$
$$\frac{1}{\log 2X} \sum_{\substack{d\leq 4000\\ d\notin\mathcal{D}\\ (d,2)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \sum_{a \bmod^* d} \left(\sum_{\substack{p_1\equiv a \bmod d\\ p_1\leq X}} \log p_1 \left(\frac{2X}{\phi(d)(\log X - \log d)} \right) \right) =$$
$$\frac{2X}{\log 2X} \mathfrak{S}_2^{-1} \sum_{\substack{d\leq 4000\\ d\notin\mathcal{D}\\ (d,2)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)} \sum_{a \bmod^* d} \left(\sum_{\substack{p_1\equiv a \bmod d\\ p_1\leq X}} \log p_1 \left(\frac{1}{1-\frac{\log d}{\log X}} \right) \right) =$$
$$2\mathfrak{S}_2^{-1} \frac{X}{\log 2X} \sum_{\substack{d\leq 4000\\ d\notin\mathcal{D}\\ (d,2)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)} \frac{\theta(X)}{1-\frac{\log d}{\log X}} \leq 0.0128867 \frac{X^2}{\log X}$$

- **für mittlere** d**:** Sei $Q = 4000 \log X$, dann gilt

$$\mathfrak{S}_2^{-1} \sum_{\substack{4000<d\leq Q\\ (d,2)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} B_d(X) \leq$$
$$\mathfrak{S}_2^{-1} \frac{1}{\log 2X} \sum_{\substack{4000<d\leq Q\\ (d,2)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \sum_{a \bmod^* d} \left(\sum_{\substack{p_1\equiv a \bmod d\\ p_1\leq X}} \log p_1 \left(\frac{2X}{\phi(d)(\log X - \log d)} \right) \right) \leq$$
$$2\mathfrak{S}_2^{-1} \frac{X}{\log 2X} \frac{\theta(X)}{1-\frac{\log Q}{\log X}} \sum_{\substack{4000<d\leq Q\\ (d,2)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)} \leq$$

$$2\mathfrak{S}_2^{-1}\frac{X}{\log 2X}\frac{\theta(X)}{1-\frac{\log Q}{\log X}}\left(\prod_{p\geq 3}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)-\sum_{\substack{d\leq 4000\\(d,2)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)}\right)\leq$$
$$0.000304496\frac{X^2}{\log X}$$

- **für große d:**

$$\mathfrak{S}_2^{-1}\sum_{\substack{Q<d<2X\\(d,2)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}B_d(X)\leq \mathfrak{S}_2^{-1}\sum_{\substack{Q<d<2X\\(d,2)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\theta(X)\left(\frac{X}{d}+1\right)\leq$$
$$\leq \mathfrak{S}_2^{-1}\left(X\theta(X)\frac{8}{3Q}+\theta(X)G(2X)\right)\leq$$
$$\leq 0.000505479\frac{X^2}{\log X}$$

Wenn wir nun alle vier Abschätzungen zusammenzählen, erhalten wir

$$\mathcal{R}\geq (0.4921-0.0128867-0.0003045-0.0005055)\frac{X^2}{\log X}\geq 0.478\frac{X^2}{\log X}$$

4.7 Die Abschätzung des Hauptterms

Nachdem wir nun eine untere Abschätzung gewonnen haben, brauchen wir noch eine obere. Hierfür werfen wir zuerst einen Blick auf die Arbeit von Shapiro & Warga ([29]). Sie betrachten

$$\mathcal{R}\leq \max_{X<N\leq 2X}\left\{\mathfrak{S}_2^{-1}(N)r_2(N)\right\}\sum_{\substack{N\in]X,2X]\\r_2(N)\neq 0}}1,$$

und verwenden ein eigenes Sieb um eine obere Schranke zu gewinnen. In unserem Fall können wir auf unsere Vorarbeiten zurückgreifen und verwenden $R_2(N)$ als obere Schranke:

$$\mathcal{R}\leq\mathcal{R}^*=\sum_{\substack{N\in]X,2X]\\r_2(N)\neq 0}}\mathfrak{S}_2^{-1}(N)R_2(N)$$

Wenn wir $\mathcal{R}^*$ betrachten, erwarten wir, dass es sich asympthotisch wie

$$\frac{X}{G(z)}\#\left\{N\in]X,2X],\exists(p_1,p_2)\in\mathcal{P}^2:N=p_1+p_2\right\}$$

verhält. Da wir in weiterer Folge das große Sieb zur Anwendung bringen wollen, führen wir die Funktion $U(\alpha)$ wie folgt ein

$$U(\alpha) = \sum_{\substack{N\in]X,2X] \\ r_2(N)\neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N)e(N\alpha). \tag{4.20}$$

Wenn wir dies nun mit (4.14) kombinieren, erhalten wir

$$\mathcal{R}^* = \sum_{d\leq z^2} \omega_d \sum_{a \bmod^* d} T(a/d)\overline{U}(a/d).$$

Damit wir den Fehler besser kontrollieren teilen wir $\mathcal{R}^*$ in drei Teile. Für die großen d führen wir den Parameter λ ein.

$$\mathcal{R}^* = \sum_{d\leq \lambda} \omega_d \sum_{a \bmod^* d} T(a/d)\overline{U}(a/d) + \mathcal{R}_3^*$$

Wie wir anfangs beschrieben haben, ist $T(a/d) \sim \frac{\mu(d)}{\phi(d)}\widehat{\theta}(X)$. Deswegen teilen wir die untere Summe in einen Hauptteil, den wir recht gut kennen und in den Fehlerterm mit T.

$$\begin{aligned}\sum_{d\leq\lambda} \omega_d \sum_{a \bmod^* d} T(a/d)\overline{U}(a/d) &= \sum_{d\leq\lambda}\sum_{a \bmod^* d} \overline{U}(a/d)\omega_d\left(T(a/d) - \frac{\mu(d)}{\phi(d)}\widehat{\theta}(X)\right) + \\ &\quad + \sum_{d\leq\lambda}\sum_{a \bmod^* d} \overline{U}(a/d)\omega_d\frac{\mu(d)}{\phi(d)}\widehat{\theta}(X) = \\ &= \mathcal{R}_1^* + \mathcal{R}_2^*\end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber wollen wir die drei Teile hier nochmals anschreiben.

$$\mathcal{R}_1^* = \sum_{\substack{N\in]X,2X] \\ r_2(N)\neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N)\left\{\sum_{d\leq\lambda} \omega_d \sum_{a \bmod^* d} \frac{\mu(d)}{\phi(d)}\widehat{\theta}(X)e(-Na/d)\right\}, \tag{4.21}$$

$$\mathcal{R}_2^* = \sum_{d\leq\lambda}\sum_{a \bmod^* d} \overline{U}(a/d)\left\{\omega_d\left(T(a/d) - \frac{\mu(d)}{\phi(d)}\widehat{\theta}(X)\right)\right\} \text{ und} \tag{4.22}$$

$$\mathcal{R}_3^* = \sum_{\lambda<d\leq z^2} \omega_d \sum_{a \bmod^* d} T(a/d)\overline{U}(a/d). \tag{4.23}$$

In weiterer Folge setzen wir die Parameter

$$X \geq \exp(67), \quad \lambda = X^{0.3} \text{ und } z^4 = \frac{X^2}{15000\log X}. \tag{4.24}$$

4.8 Abschätzung von $\mathcal{R}_1^*$

Proposition 4.2. *Unter (4.24) gilt*

$$\mathcal{R}_1^* \leq \frac{X^2}{G(z)} \left\{ \delta + \frac{0.232}{G(z)} \delta^{36/37} + 0.0008\delta^{9/19} + 0.0008 \right\}.$$

Wie wir im Beweis sehen werden, reichen für die Abschätzung die ersten ds. Die anderen können wir vernachlässigen, obwohl $G(z)\omega_d$ sich nicht wie $\mu(d)/\phi(d)$ verhält. Wir haben im Lemma 4.5.3 gesehen, dass es sich wie $\frac{\mu(d)}{\phi(d)}(1 + \nu_d/G(z))$ verhält. Dabei ist ν_d recht leich zu berechnen und numerisch rund -1. Auf der anderen Seite ist jedoch $G(z)$ nur rund 30 und deswegen ist $\nu(d)$ etwas zu groß für einen reinen Fehler- Term. Um dieses Problem ein wenig zu umgehen werden wir die Ramanujan-Summen genauer betrachten.
Wir definieren

$$\mathcal{G} = \{d \leq 2000 \mid d \text{ ungerade und } \mu^2(d) = 1\},$$

dann ist $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup 2\mathcal{G}$.
Wir teilen nun $\mathcal{R}_1^*$ wie schon zuvor $\mathcal{R}^*$ in drei Teile. Dabei führen wir jedoch nicht eine Parameter ein, sondern benutzen unsere Menge $\mathcal{F}$ um den oberen Teil zu kontrollieren. Für den unteren Teil spalten wir den Hauptteil (welcher diesmal von $\omega_d \sim \frac{\mu(d)}{\phi(d)G(z)}$ bestimmt wird) und betrachten dann wiederum getrennt den Fehler:

$$\mathcal{R}_1^* = \mathcal{R}_{11}^* + \mathcal{R}_{12}^* + \mathcal{R}_{13}^*$$

wobei

$$\mathcal{R}_{11}^* = \widehat{\theta}(X) \sum_{\substack{N \in]X,2X] \\ r_2(N) \neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) \left\{ \sum_{d \in \mathcal{F}} \frac{\mu^2(d)}{G(z)\phi^2(d)} c_d(N) \right\}, \tag{4.25}$$

$$\mathcal{R}_{12}^* = \widehat{\theta}(X) \sum_{\substack{N \in]X,2X] \\ r_2(N) \neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) \left\{ \sum_{d \in \mathcal{F}} \frac{\mu(d)}{\phi(d)} \left(\omega_d - \frac{\mu(d)}{G(z)\phi(d)} \right) c_d(N) \right\} \tag{4.26}$$

und mit (4.20)

$$\mathcal{R}_{13}^* = \widehat{\theta}(X) \sum_{\substack{d \leq \lambda \\ d \notin \mathcal{F}}} \frac{\mu(d)}{\phi(d)} \omega_d \sum_{a \bmod^* d} \overline{U}(a/d). \tag{4.27}$$

4.8.1 Einleitende Lemmata

Wir brauchen diese Lemmata um mit den abgebrochenen Summen multiplikativer Funktionen leichter umzugehen. Hierzu nennen wir eine komplexe Funktion h streng multiplikativ, wenn

- $h(mn) = h(m)h(n)$, für m und n relativ prim und
- $h(p^k) = h(p)$, für jede Primzahl p und jede positive ganze Zahl k

Lemma 4.8.1. *Seien X und Y positive reelle Zahlen mit $X \le Y$. Seien f und g komplexe Funktionen mit kompaten Support. Sei h eine streng multiplikative Funktion mit der folgenden Eigenschaft: sei h_1 definiert durch $h_1 = h \star \mu$, dann gilt*

- *$h_1(p) > -p$ für alle Primzahlen p und*
- *es gibt eine reelle Zahl c, sodass $\sum_{Z<l} |h_1(l)|/l \le c/Z$ für alle $Z > 0$.*

Dann ist die Doppelsumme

$$\sum_{\substack{n\in]X,Y] \\ d\ge 1}} h(n)f(d)g((d,n)) =$$

$$(Y-X)\prod_{p\ge 2}\left(1+\frac{h_1(p)}{p}\right)\sum_d \left\{\frac{f(d)}{d}\prod_{p|d}\frac{1}{1+\frac{h_1(p)}{p}}\sum_{r|d} g(r)h(r)\phi(d/r)\right\}$$
$$+\mathcal{O}^*\left(c\left(1-\frac{X}{Y}\right)\sum_d \frac{|f(d)|}{d}\sum_{r|d}|g(r)h(r)|\,\phi(d/r)\right)$$
$$+\mathcal{O}^*\left(\sum_d |f(d)|\prod_{p|d}\frac{1}{1+\frac{|h_1(p)|}{p}}\left(\sum_{l\le Yd}|h_1(l)|\right)\sum_{r|d}|g(r)h(r)|\,\phi(d/r)\right).$$

Beweis. Zu allererst sei angemerkt, dass $h_1(l) = 0$ wenn $\mu(l) = 0$ und dass die strenge Multiplikativität zusammen mit dem zweiten Punkt der Eigenschaft von h garantiert, dass $\prod_{p\ge 2}(1 + h_1(p)/p)$ konvergiert. Wir schreiben nun die Doppelsumme um und nennen sie S;

$$S = \sum_d f(d)\sum_{r|d} g(r)\sum_{\substack{n\in]X,Y] \\ (n,d)=r}} h(n).$$

Sei $H(d,r)$ die innerste Summe. Dann können wir $n = r\widehat{r}m$ schreiben, wobei $(m,r) = 1$ und $[p \mid \widehat{r} \Rightarrow p \mid r]$ gilt. Aus der strengen Multiplikativität folgt: $h(n) = h(r\widehat{r})h(m) = h(r)h(m)$.

Wir verwenden $h(m) = \sum_{l|m} h_1(l)$ und schreiben die Bedingung um.

$$\begin{aligned}
H(d,r) &= \sum_{\substack{n\in]X,Y] \\ (n,d)=r}} h(n) = \\
&= \sum_{\substack{m\in]X/r,Y/r] \\ (m,d/r)=1}} h(r) \sum_{\substack{l|m \\ (l,r)=1}} h_1(l)
\end{aligned}$$

Man erkennt leicht, dass aus $l \mid m$, $(m, d/r) = 1$ und $(l, r) = 1$ folgt, dass $(l, d) = 1$.

$$\begin{aligned}
&= h(r) \sum_{\substack{(l,d)=1 \\ l\leq Y/r}} h_1(l) \sum_{\substack{m\in]X/r,Y/r] \\ (m,d/r)=1 \\ l|m}} 1 \\
&= h(r) \sum_{\substack{(l,d)=1 \\ l\leq Y/r}} h_1(l) \left(\frac{Y-X}{dl} \phi(d/r) + \mathcal{O}^*(\phi(d/r)) \right)
\end{aligned}$$

Schließlich sei noch angemerkt, dass

$$\sum_{\substack{(l,d)=1 \\ l\leq Y/r}} \frac{h_1(l)}{l} = \sum_{(l,d)=1} \frac{h_1(l)}{l} + \mathcal{O}^*(cr/Y)$$

wegen dem zweiten Teil der Eigenschaft. Aus diesen beiden Gleichungen folgt der Rest durch einsetzen. □

Lemma 4.8.2. *Wir haben*

$$\prod_{p\geq 3} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) = 0.74791 + \mathcal{O}^*(10^{-5})$$

$$\prod_{p\geq 3} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 1.4132 + \mathcal{O}^*(10^{-4})$$

$$\prod_{p\geq 3} \left(1 + \frac{2}{p^2-2p+2}\right) = 1.7668 + \mathcal{O}^*(10^{-4})$$

$$\prod_{p\geq 3} \left(1 - \frac{2p-3}{(p-1)(p^2-p-1)}\right) = 1.5801 + \mathcal{O}^*(10^{-4})$$

$$\prod_{p\geq 3} \left(1 - \frac{2}{p(p^2-2p+2)}\right) = 0.8362 + \mathcal{O}^*(10^{-4})$$

und

$$\sum_{\substack{d\leq 2000\\(d,2)=1}} \mu^2(d)\prod_{p|d}\frac{2p-3}{(p-1)(p^2-p-1)} = 1.5789 + \mathcal{O}^*(10^{-4})$$

$$\sum_{\substack{d\leq 2000\\(d,2)=1}} \mu^2(d)\prod_{p|d}\frac{p^2-p-1}{p(p-1)^2} = 4.3459 + \mathcal{O}^*(10^{-4})$$

$$\sum_{\substack{d\leq 2000\\(d,2)=1}} \mu^2(d)\prod_{p|d}\frac{2p-3}{p(p-1)} = 8.1512 + \mathcal{O}^*(10^{-4})$$

4.8.2 Eine Abschätzung für $\mathcal{R}_{11}^*$

Seien

$$\rho = \sum_{\substack{N\in]X,2X]\\ N \text{ gerade}}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) \sum_{\substack{2000<d\\ d \text{ ungerade}}} \frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)}\phi((d,N)),$$

$$\rho^* = \sum_{\substack{N\in]X,2X]\\ N \text{ gerade}}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) \sum_{\substack{d\leq 2000\\ d \text{ ungerade}}} \frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)}\phi((d,N)).$$

Dann erhalten wir unter Verwendung der Eigenschaften, dass $c_{2d}(N) = c_d(N)$ für d ungerade und N gerade und dass $|c_d(N)| \leq \phi((d,N))$,

$$\mathcal{R}_{11}^* = \frac{\widehat{\theta}(X)}{G(z)} \sum_{\substack{N\in]X,2X]\\ r_2(N)\neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N)\sum_{d\in\mathcal{F}}\frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)}c_d(N) =$$

$$= \frac{\widehat{\theta}(X)}{G(z)} \sum_{\substack{N\in]X,2X]\\ r_2(N)\neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N)\left(\sum_{\substack{d<2000\\(d,2)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)}c_d(N) + \sum_{\substack{d<2000\\(d,2)=1}}\frac{\mu^2(2d)}{\phi^2(2d)}c_{2d}(N)\right) =$$

$$= \frac{\widehat{\theta}(X)}{G(z)}(\delta X + \mathcal{O}^*\left(\sum_{\substack{N\in]X,2X]\\ r_2(N)\neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) 2\sum_{\substack{d<2000\\(d,2)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)}c_d(N)\right)) =$$

$$= \frac{\widehat{\theta}(X)}{G(z)}\left(\delta X + 2\mathcal{O}^*(\rho)\right).$$

Wir können ρ nur schwer Abschätzen, aber ρ^* und $\rho + \rho^*$ umso besser; deswegen:

$$\begin{aligned}\rho + \rho^* &= \mathfrak{S}_2^{-1} \prod_{p\geq 3} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \sum_{\substack{N\in]X,2X] \\ N \text{ gerade}}} \prod_{\substack{p\mid N \\ p\neq 2}} \frac{p(p-2)}{p(p-2)+2} \\ &= \mathfrak{S}_2^{-1} \prod_{p\geq 3} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \sum_{(d,2)=1} \prod_{p\mid N} \frac{p(p-2)}{p(p-2)+2} \left(\frac{X}{2d} + \mathcal{O}^*(1)\right)\end{aligned}$$

Für ρ^* helfen uns die Lemmata 4.8.1, 4.4.10 und 4.8.2. Aus

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2\rho^* = \frac{X}{2} \prod_{p\geq 3} \left(1 - \frac{1}{p(p-2)}\right) \sum_{\substack{d\leq 2000 \\ (d,2)=1}} \mu^2(d) \prod_{p\mid d} \frac{2p-3}{(p-1)(p^2-p-1)} + \\ + \mathcal{O}^*\left(\frac{4}{2} \sum_{\substack{d\leq 2000 \\ (d,2)=1}} \mu^2(d) \prod_{p\mid d} \frac{p^2-p-1}{p(p-1)^2}\right) + \mathcal{O}^*\left(G(2000\cdot 2X) \sum_{\substack{d\leq 2000 \\ (d,2)=1}} \mu^2(d) \prod_{p\mid d} \frac{2p-3}{p(p-1)}\right)\end{aligned}$$

folgt mit den numerischen Berechnungen aus Lemma 4.8.2, dass

$$|\mathcal{R}_{11}^*| \leq \frac{\widehat{\theta}}{G(z)} X(\delta + 0.000794) \tag{4.28}$$

4.8.3 Eine Abschätzung für $\mathcal{R}_{12}^*$

Wir definieren

$$\nu_d = \mu(d)\phi(d)G^2(d)\left(\omega_d - \frac{\mu(d)}{G(z)\phi(d)}\right) \tag{4.29}$$

und

$$H(N) = \sum_{d\in\mathcal{F}} \frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)} \nu_d c_d(N) = \sum_{\substack{d\leq 2000 \\ (d,2)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)} (\nu_d + \nu_{2d}) c_d(N)$$

Dadurch ergibt sich

$$\mathcal{R}_{12}^* = \widehat{\theta}(X) \sum_{\substack{N\in]X,2X] \\ r_2(N)\neq 0}} \mathfrak{S}_2^{-1}(N) \frac{H(N)}{G^2(N)}$$

Wir wollen uns nun diese Definitionen näher ansehen und bemerken dabei, dass ν_d auch von der Wahl von z abhängig ist. Wie wir im Lemma 4.5.3 gesehen haben, gibt es auch eine Asympthotik in z. Außerdem haben wir dort vermutet, dass ν_d "sehr oft" negativ ist. Dies konnten wir leicht für kleine ds nachprüfen. Was ist jedoch mit den anderen? So sind

zum Beispiel ν_{5005} und ν_{170017} positiv, wie man sehr leicht nachprüft.
Diese Fragen interessiert uns hier nicht direkt. Vielmehr wollen wir das Maximum von $H(N)$ suchen. Hierbei hilft uns eine einfach Abschätzung wie $|c_d(N)| \leq \phi((d,N))$ nicht mehr, weil die zentrale Eigenschaft, nämlich die sich wechselnden Vorzeichen von $c_d(N)$ und ν_d verloren gehen. Um dies zu verdeutlichen, wollen wir $H(N)$ anders schreiben

$$H(N) = \sum_{\substack{D \leq 2000 \\ (D,2)=1 \\ D|N}} D\mu(D) \sum_{\substack{d \leq 2000 \\ (d,2)=1 \\ D|d}} \mu(d) \frac{\nu_d + \nu_{2d}}{\phi^2(d)}.$$

Nun führen wir

$$a_D = D\mu(D) \sum_{\substack{d \leq 2000 \\ (d,2)=1 \\ D|d}} \mu(d) \frac{\nu_d + \nu_{2d}}{\phi^2(d)}.$$

ein. Damit können wir $H(N) = \sum_{D|N} a_D$ schreiben. Wir verwenden nun die brutale Methode und rechnen alle möglichen a_D aus um dann eine Abschätzung für $H(N)$ zu bekommen. Dabei haben wir berechnet, dass a_1 das einzige positive der $H(N)$ ist. Damit ergibt sich

$$\max_{N \text{ gerade}} H(N) = a_1.$$

Wir können nun $\mathcal{R}_{12}^*$ mit Hilfe von Lemma 4.4.11 abschätzen

$$\mathcal{R}_{12}^* \leq \frac{\widehat{\theta} X}{G(z)} \frac{0.2303}{G(z)} \delta^{36/37}$$

4.8.4 Eine Abschätzung für $\mathcal{R}_{13}^*$

Wir erinnern uns, dass

$$\mathcal{R}_{13}^* = \widehat{\theta}(X) \sum_{\substack{d \leq \lambda \\ d \notin \mathcal{F}}} \frac{\mu(d)}{\phi(d)} \omega_d \sum_{a \bmod^* d} \overline{U}(a/d).$$

Wir verwenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Große-Sieb-Ungleichung um daraus

$$|\mathcal{R}_{13}^*|^2 = \frac{\widehat{\theta}^2(X)}{G^2(z)} \sum_{\substack{d \leq \lambda \\ d \notin \mathcal{F}}} \frac{|G(z)\omega_d|}{\phi(d)} \|U\|_2^2 (X + \lambda^2)$$

zu bekommen. Eine einfache Rechnung gibt uns mit Lemma 4.5.10

$$\sum_{\substack{d \leq \lambda \\ d \notin \mathcal{F}}} \frac{|G(z)\omega_d|}{\phi(d)} \leq 0.0000009.$$

Wir können weiters $\|U\|^2$ mit Lemma 4.4.11 abschätzen und erhalten

$$|\mathcal{R}_{13}^*| = \frac{X\widehat{\theta}(X)}{G(z)}(\delta^{18/19}0.5159 \cdot 0.0000009)^{1/2}$$

und somit

$$|\mathcal{R}_{13}^*| \leq 0.0008\frac{X^2}{G(z)}\delta^{9/19}$$

4.8.5 Zusammenfassung

Von oben haben wir

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_1^*| &\leq |\mathcal{R}_{11}^*| + \mathcal{R}_{12}^* + |\mathcal{R}_{13}^*| \leq \\ &\leq \frac{X^2}{G(z)}\left(\delta + 0.0008 + \frac{0.2303}{G(z)}\delta^{36/37} + 0.0008 \cdot \delta^{9/19}\right)\end{aligned}$$

womit der Beweis von Proposition 4.2 abgeschlossen wäre.

4.9 Die obere Grenze der Streuung

In diesem Abschnitt, beschäftigen wir uns mit $\mathcal{R}_2^*$. Zur Erinnerung

$$\mathcal{R}_2^* = \sum_{d\leq\lambda}\sum_{a \bmod^* d}\overline{U}(a/d)\left\{\omega_d\left(T(a/d) - \frac{\mu(d)}{\phi(d)}\widehat{\theta}(X)\right)\right\}$$

Proposition 4.3. *Unter (4.24) gilt*

$$|\mathcal{R}_2^*| \leq \frac{x^2}{G(z)}\left(0.02897\delta^{9/19}\right).$$

4.9.1 Vorarbeiten

Zu allererst wollen wir folgendes definieren

$$\widehat{T}(\alpha) = \sum_{\sqrt{X}<p\leq X}\log p \quad e(p\alpha) \tag{4.30}$$

Wir setzen $T_1(\alpha) = T(\alpha) - \widehat{T}(\alpha)$ und bekommen als Fehlerterm

$$\mathcal{R}_{21}^* = \sum_{d\leq\lambda}\sum_{a \bmod^* d}\left(\omega_d T_1(a/d)\overline{U}(a/d)\right) \tag{4.31}$$

Wir benutzen die Cauchy-Schwarz-Ungleichung um aus (4.31)

$$|\mathcal{R}_{21}^*|^2 \leq \sum_{d\leq\lambda} \sum_{a\mathrm{mod}^* d} |U(a/d)|^2 \sum_{d\leq\lambda} \sum_{a\mathrm{mod}^* d} \omega_d^2 |T_1(a/d)|^2$$

zu gewinnen. Für den ersten Faktor verwenden wir die Große-Sieb-Ungleichung und für den zweiten wissen wir aus den Lemmata (4.5.6) und (4.4.5), dass $|G(z)\omega_d| \leq 60.62 \cdot d^{-7/10}$. Wir integrieren nun partiell und bekommen

$$\begin{aligned}\sum_{d\leq\lambda} \sum_{a\mathrm{mod}^* d} \omega_d^2 |T_1(a/d)|^2 &\leq \frac{60.62^2}{G^2(z)} \frac{7}{5} \int_1^\lambda \sum_{d\leq t} \sum_{a\mathrm{mod}^* d} |T_1(a/d)|^2 \frac{dt}{t^{17/5}} + \\ &+ \frac{60.62^2}{\lambda^{7/5}} \sum_{d\leq\lambda} \sum_{a\mathrm{mod}^* d} |T_1(a/d)|^2 \leq \\ &\leq \frac{60.62^2}{G^2(z)} \|T_1\| \left(\sqrt{X} + \frac{10}{3}\lambda^{3/5}\right)\end{aligned}$$

Die Abschätzung des ersten und zweiten Faktors zusammen mit Lemma 4.4.11 und der Abschätzung $\theta(t) < 1.002t$ für $t > 0$ ergibt

$$|\mathcal{R}_{21}^*|^2 \leq 60.62^2 \cdot 1.002 \cdot 0.5159 \frac{1 + \frac{10}{3}X^{-8/25}}{X} \left(1 + X^{-2/5}\right) \frac{X^4}{G^2(z)} \leq 10^{-25} \frac{X^4}{G^2(z)} \tag{4.32}$$

4.9.2 Der Hauptteil der Streuung

Nachdem wir unseren Fehlerterm abgeschätzt haben, liegt es auf der Hand, dass wir uns nun

$$\mathcal{R}_{22}^* = \mathcal{R}_2^* - \mathcal{R}_{21}^*$$

widmen. Doch zuvor noch ein Lemma:

Lemma 4.9.1. *Sei d eine positive ganze Zahl. Wenn $S(\alpha) = \sum_n a_n e(n\alpha)$ derart, dass $a_n = 0$, für $(n,d) > 1$, dann*

$$\sum_{a\mathrm{mod}^* d} \left| S(a/d) - \frac{\mu(d)}{\phi(d)} S(0) \right|^2 = \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi\neq\chi_0}} |\tau(\chi)|^2$$

wobei χ_0 der triviale Charakter modulo d ist und $\tau(\chi)$ die Gauss'sche Summe

$$\tau(\chi) = \sum_{a\mathrm{mod}^* d} \chi(a) e(a/d)$$

Außerdem ist für $q \neq 1$

$$\sum_{\chi\mathrm{mod}^* q} \left| \sum_n a_n \chi(n) \right|^2 = \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \phi(d) \sum_{b\mathrm{mod}^* d} \left| \sum_{n\equiv b \bmod d} a_n - \frac{S(0)}{\phi(d)} \right|^2.$$

Beweis. Wir erinnern uns, dass für d quadratfrei $|\tau(\chi)|^2$ gleich dem Führer von χ ist. Daher gilt für alle Restklassen b modulo d

$$\sum_{n \equiv b \bmod d} a_n = \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\chi \bmod d} \overline{\chi}(b) \sum_n a_n \chi(n)$$

daher gilt für alle a die relativ prim zu d sind

$$\begin{aligned}
S(a/d) &= \sum_{b \mathrm{mod}^* d} \sum_{n \equiv b \ (d)} a_n e(na/q) = \\
&= \sum_{b \mathrm{mod}^* d} \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\chi \bmod d} \overline{\chi}(b) \sum_n a_n \chi(n) e(ab/q) = \\
&= \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\chi \bmod d} \sum_{b \mathrm{mod}^* d} \overline{\chi}(b) e(ab/q) \sum_n a_n \chi(n) = \\
&= \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\chi \bmod d} \sum_{b \mathrm{mod}^* d} \chi(a) \overline{\chi}(b) e(b/q) \sum_n a_n \chi(n) = \\
&= \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\chi \bmod d} \chi(a) \tau(\overline{\chi}) \sum_n a_n \chi(n).
\end{aligned}$$

Mit der Tatsache, dass $\tau(\chi_0) = \mu(d)$, und der Orthogonalität der Charaktere bekommen wir den ersten Teil.

$$S(a/d) - \frac{\mu(d)}{\phi(d)} S(0) = \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(a) \tau(\overline{\chi}) \sum_n a_n \chi(n)$$

Für den zweiten verwenden wir Parseval's Gleichung und erhalten

$$\sum_{d|q} \sum_{\chi \mathrm{mod}^* d} \left| \sum_n a_n \chi(n) \right|^2 = \phi(q) \sum_{b \mathrm{mod}^* q} \left| \sum_{n \equiv b \ (d)} a_n \right|^2 .$$

Dabei ist letztere gleich

$$\sum_{b \mathrm{mod}^* q} \left| \sum_{n \equiv b \ (d)} a_n - \frac{S(0)}{\phi(q)} \right|^2 + \frac{|S(0)|^2}{\phi(q)}.$$

Daraus folgt mit der Möbius'schen Umkehrformel unser zweites Resultat. $\square$

Wir wenden die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung auf $\mathcal{R}_{22}^*$ an und erhalten

$$|\mathcal{R}_{22}^*| \leq \|U\|_2^2 \, (X + \lambda^2) B(\lambda, X), \tag{4.33}$$

wobei

$$B(\lambda, X) = \sum_{d \le \lambda} |\omega_d|^2 \sum_{a \bmod^* d} \left| \widehat{T}(a/d) - \frac{\mu(d)}{\phi(d)} \overline{T}(0) \right|^2 .$$

Wegen $|\omega_d|$ sind die Terme mit kleinem d eine gute Approximation von $B(\lambda, X)$. Wir können die Approximation jedoch verbessern, wenn wir multiplikative Charaktere verwenden. Denn die Distribution in den Restklassen modulo d hat einen viel größeren Einfluss. Hierzu führen wir folgende Notation ein:

$$\left\langle \widehat{T}, \chi \right\rangle = \sum_n a_n \overline{\chi}(n).$$

Mit Hilfe von Lemma 4.9.1 bekommen wir

$$B(\lambda, X) = \sum_{\substack{1 \ne q < \lambda \\ (q,2)=1}} \mu^2(q) \frac{t(q)}{G^2(z)} \sum_{\chi \bmod^* q} \left| \left\langle \widehat{T}, \chi \right\rangle \right|^2 \tag{4.34}$$

mit

$$t(q) = q \sum_{\substack{d \le \lambda \\ d \equiv 0 \bmod q}} \frac{|G(z)\omega_d|^2}{\phi(d)}.$$

Dabei haben wir in (4.34) $\mu^2(d)$ hinzugefügt um explizit darauf hinzuweisen, dass $t(q)$ für nicht-quadratfreie q verschwindet. Außerdem wurde die Bedingung $(d, 2) = 1$ hinzugefügt, da es andernfalls keine anderen primitiven Charaktere modulo q gibt.
Mit der Großen Siebungleichung bekommen wir diese Abschätzung (sehr gut für Q^2 nahe bei X)

$$\sum_{q \le Q} G(Q/q) \sum_{\chi \bmod^* q} \left| \left\langle \widehat{T}, \chi \right\rangle \right|^2 \le \left\| \widehat{T} \right\|_2^2 (X + Q^2). \tag{4.35}$$

Wir wählen $Q = \sqrt{X/10}$ und subtrahieren den Term für $q = 1$ auf beiden Seiten. Mit Lemma 4.4.4, $G(Q) \ge \frac{1}{2} \log X$ bekommen wir dann

$$\begin{aligned} \sum_{1 \ne q \le Q} G(Q/q) \sum_{\chi \bmod^* q} \left| \left\langle \widehat{T}, \chi \right\rangle \right|^2 &\le \frac{11}{10} \left\| \widehat{T} \right\|_2^2 X - \frac{1}{2} (\log X) X \widehat{\theta}(X) \le \\ &\le 0.6 \widehat{\theta}(X) X \log X. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Unsere obere Schranke für $B(\lambda, X)$ folgt aus den Tatsachen, dass

- für q groß genug, $t(q)$ klein ist und somit auch der Anteil an der Summe

- für q klein, aus Lemma 0 folgt, dass $\left\langle \widehat{T}, \chi \right\rangle$ klein ist, und somit auch hier der Anteil an der Summe.

Für alle q in $\mathcal{D}$ und für alle b relativ prim zu q gilt

$$\left| \sum_{\substack{\sqrt{X}<p\leq x \\ p\equiv b \quad (q)}} \log p - \frac{\widehat{T}}{\phi(q)} \right| \leq \varepsilon_d \frac{X}{\phi(q)}.$$

Aus Lemma 4.5.6, (4.34) und (4.36) folgt schließlich

$$\begin{aligned} B(\lambda, X) \leq & \frac{1}{G^2(z)} \sum_{\substack{q\in\mathcal{D} \\ q\neq 1}} \mu^2(q) t(q) \sum_{\chi \bmod^* q} \left| \left\langle \widehat{T}, \chi \right\rangle \right|^2 \\ & + \frac{0.0008 - 0.0003}{G^2(z)} 0.6\widehat{\theta}(X) X \frac{\log X}{G(Q/233)} \\ & + \frac{0.0003}{G^2(z)} 0.6\widehat{\theta}(X) X \frac{\log X}{G(Q/\lambda)} \end{aligned}$$

und für $q \in \mathcal{D}$ verwenden wir den zweiten Teil von Lemma 4.9.1 zusammen mit

$$t(q) \leq 2.301 f_4(q) + 2 \cdot 10^{-12} q + 0.00125 f_3(q).$$

Wir machen nun einige Berechnungen und sehen dann

$$\sum_{\substack{q\in\mathcal{D} \\ q\neq 1}} t(q) \sum_{\chi \bmod^* q} \left| \left\langle \widehat{T}, \chi \right\rangle \right|^2 \leq 0.0000148\, X^2,$$

$$G(Q/\lambda) \geq 0.2 \log X,$$
$$G(Q/233) \geq 0.4214 \log X.$$

Es ist besonders hervorzuheben, dass durch die Wahl von Lemma 4.9.1 ε_d^2 anstelle von ε_d in diesem Beweis vorkommt. Schließlich bekommen wir

$$B(\lambda, X) \leq 0.00163 \frac{X^2}{G^2(z)} \tag{4.37}$$

4.9.3 Zusammenfassung

Wenn wir nun (4.32), (4.33), (4.37) und Lemma 4.4.11 verwenden, erhalten wir

$$|\mathcal{R}_2^*| \leq 0.02897 \frac{X^2}{G(z)} \delta^{9/19}$$

Damit wäre Proposition 4.3 bewiesen.

4.10 Abschätzung von $\mathcal{R}_3^*$

Proposition 4.4. *Unter (4.24) gilt*

$$|\mathcal{R}_3^*| \leq \frac{X^2}{G(z)} \left(0.0102 \cdot \delta^{9/19}\right).$$

Der Hauptteil des Beweises dieser Proposition, steckt in folgendem Satz:

Satz 4.4. *Sei $T(\alpha) = \sum_{n \leq X} a_n e(n\alpha)$ eine trigonometrische Reihe mit komplexen Koeffizienten derart, dass*

$$\textit{entweder } \{n|a_n \neq 0\} \subset 2\mathbb{N}, \textit{ oder } \{n|a_n \neq 0\} \subset 2\mathbb{N}+1.$$

Dann gilt für $z \geq \exp(18)$ derart, dass $0.5 \log X - 0.5 \geq \log z \geq 0.422 \log X$, und für alle $\lambda \in [1, \sqrt{X}]$

$$\sum_{\lambda < d \leq z^2} |G(z)\omega_d| \sum_{a mod^* d} |T(a/d)|^2 \leq \|T\|_2^2 + \{52.9\frac{X}{\lambda^{7/10}} + 7.464(Xz\log z)^{\frac{13}{23}}$$
$$+ 0.3708\sqrt{Xz}\log^2 z + 0.1909\frac{X}{z}\log^3 z + 1.251z^2\}$$

Zuerst wollen wir den Satz beweisen, um danach die Proposition 4.4 davon abzuleiten. Hierzu sei in den nächsten beiden Abschnitten

$$W(d) = \sum_{a mod^* d} |T(a/d)|^2,$$

wobei $T(\alpha) = \sum_{n \leq X} a_n e(n\alpha)$ derart, dass $\{n|a_n \neq 0\}$ Teilmenge von $2\mathbb{N}$ oder $2\mathbb{N}+1$, nicht identisch zu Null und normalisiert ($\|T\|_2^2 = 1$) ist.

4.10.1 Lemmata rund um die trigonometrische Reihe T

In diesem Unterabschnitt wollen wir alle Teile beweisen, die unser Wissen rund um T ausmachen. Hierbei verwenden wir vermehrt die große Siebungleichung und ihre gewichtete Version von Montgomery & Vaughan. Dabei benützen wir letztere mit der Verfeinerung von Preismann. An dieser Stelle sei sein Resultat wiederholt:

Lemma 4.10.1 (Preissmann [19])**.** *Sei $S(\alpha) = \sum_{n \leq X} a_n e(n\alpha)$ eine trigonometrische Reihe und Q eine positive reelle Zahl, dann gilt*

$$\sum_{q \leq Q} \frac{1}{X + \rho q Q} \sum_{a mod^* d} |S(a/q)|^2 \leq \|S\|_2^2,$$

mit

$$\rho = \sqrt{1 + \frac{2}{3}\sqrt{6/5}} \leq \frac{4}{3}$$

Unser zweites Werkzeug mit dem wir T bearbeiten ist die Parität der n für welche $a_n \neq 0$. Um dies zu erreichen haben wir ganz am Anfang die Funktion $\kappa(a, d)$ eingeführt.

Lemma 4.10.2. *Sei Δ eine ganze Zahl, $4 \nmid \Delta$ und t eine positive reelle Zahl, dann gilt*

$$\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ d\leq t}} \frac{W(\Delta d)}{X + \rho t \Delta d} \leq \kappa(1/2, \Delta)$$

und

$$\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ d\leq t}} W(\Delta d) \leq \kappa(1/2, \Delta)(X + \Delta t^2),$$

mit ρ wie in Lemma 4.10.1

Beweis. OBdA. setzen wir voraus, dass Δ gerade ist, sonst wäre die Abschätzung einfach, da die Menge

$$\left\{ \frac{a}{\Delta d} \,|\, (d, \Delta) = 1, d \leq t, a \mathrm{mod}^* \Delta d \right\}$$

Δt^2 gleichverteilt ist.
Der Beweis verläuft nun in zwei Schritten:

1. Wir zeigen zuerst, dass falls $2 \mid \Delta$, gilt $W(\Delta d) = W(\Delta d/2)$ für $\Delta/2$ ungerade und d irgendeine ganze Zahl. Mit dem Chinesischen Restwertsatz bekommen wir

$$\sum_{a \mathrm{mod}^* \Delta d} \left| T^2 \left(\frac{a}{\Delta d} \right) \right| = \sum_{b \mathrm{mod}^* 2} \left(\sum_{c \mathrm{mod}^* \Delta d/2} \left| T^2 \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{\Delta d/2} \right) \right| \right).$$

   Aber hier liefert uns unsere Paritätskontrolle

$$\left| T \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{\Delta d/2} \right) \right| = \left| T \left(\frac{c}{\Delta d/2} \right) \right|$$

   und somit unser Gewünschtes Resultat.

2. Sei nun $\Delta = 2\Delta'$. Dann

$$\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ d\leq t}} \frac{W(\Delta d)}{X + \rho t \Delta d} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ d\leq t}} \frac{W(\Delta d)}{X + \rho t \Delta d} + \sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ d\leq t}} \frac{W(\Delta' d)}{X + \rho t \Delta d} \right)$$

Seien nun d und d' zwei ganze Zahlen relativ prim zu Δ und $\leq t$, und seien a und a' zwei ganze Zahlen relativ prim zu Δd und $\Delta d'$, dann gilt

$$\left|\frac{a}{\Delta' d} - \frac{a'}{\Delta' d'}\right| \geq \left|\frac{a}{\Delta' d} - \frac{a'}{\Delta d'}\right| \geq \frac{1}{\Delta dt},$$
$$\left|\frac{a}{\Delta' d} - \frac{a'}{\Delta' d'}\right| \geq \frac{1}{\Delta' 2dt} = \frac{1}{\Delta dt}.$$

Der Rest folgt unmittelbar aus der großen Siebungleichung (Lemma 4.10.1).

□

Lemma 4.10.3. *Seien A und B zwei positive Konstanten derart, dass $A \leq B$. Dann gilt für alle $4 \nmid \Delta \in \mathbb{Z}$:*

$$\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{\Delta d} \leq \kappa(1/2,\Delta)\left(\frac{X}{\Delta A} + \rho B\right),$$
$$\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{\Delta d} \leq \kappa(1/2,\Delta)\left(\frac{X}{\Delta A}\frac{1}{1+\rho BA\Delta/X} + \frac{2X}{\rho B\Delta}\left(\frac{1}{2} + \log\frac{B}{A}\right) + \rho B\right),$$
$$\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{\Delta d} \log\frac{z^2}{\Delta d} \leq \kappa(1/2,\Delta)\left(\frac{X}{\Delta A}\log\frac{z^2}{\Delta A} + \rho B\left(\log\frac{z^2}{\Delta B} + 1\right)\right).$$

für $\Delta B \leq z^2$.

Beweis. Wir definieren

$$S = \frac{1}{\rho B}\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{\Delta d}$$

welches man umschreiben kann zu:

$$S = \sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{X+\rho B\Delta d} + X\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{(X+\rho B\Delta d)\rho B\Delta d}$$

und mit Lemma 4.10.2

$$S \leq \kappa(1/2,\Delta) + X\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{(X+\rho B\Delta d)\rho B\Delta d}$$

Die zweite Summe kann auf zwei Arten behandelt werden:

1. Wir definieren die fallende Funktion φ mit

$$\varphi(t) = \frac{1}{(X + \rho B \Delta t)\rho B \Delta t}.$$

Die Abelsche Summation liefert uns

$$S \leq \kappa(1/2, \Delta) + X\varphi(B) \sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} W(\Delta d) + X \int_A^B \sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq t}} W(\Delta d)(-\varphi'(t))dt,$$

und mit Lemma 4.10.2 erhalten wir

$$S \leq \kappa(1/2, \Delta) + \left(1 + X^2\varphi(A)(X + \Delta A^2) + 2X\Delta \int_A^B t\varphi(t)dt\right).$$

Schließlich haben wir

$$\rho BS \leq \kappa(1/2, \Delta)\left(\rho B + \frac{X(X + \Delta A^2)}{\Delta A(X + \rho BA\Delta)} + \frac{2X\Delta}{\rho B\Delta} \log\left(\frac{X + \rho B^2\Delta}{X + \rho AB\Delta}\right)\right)$$

2. Mit einem anderen Ansatz erhalten wir

$$S \leq \kappa(1/2, \Delta) + \frac{X}{\rho B\Delta} \int_A^B \sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq t}} \frac{W(\Delta d)}{X + \rho B\Delta d} \frac{dt}{t^2} + \frac{X}{\rho B\Delta} \sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{X + \rho B\Delta d} \frac{1}{B}$$

womit wir

$$\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{\Delta d} \leq \kappa(1/2, \Delta)\left(\frac{X}{\Delta A} + \rho B\right).$$

erhalten.

Die dritte Ungleichung folgt aus der letzteren indem wir schreiben

$$\sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{\Delta d} \log \frac{z^2}{\Delta d} = \int_1^{z^2/\Delta} \sum_{\substack{(d,\Delta)=1 \\ A<d\leq B}} \frac{W(\Delta d)}{\Delta d} \frac{dt}{t}.$$

Daraus folgt direkt das Gewünschte. □

4.10.2 Weiterführende Lemmata

In diesem Abschnitt führen wir folgende Notation ein:

$$V(A,B) = \sum_{A<d\leq B} |G(z)\omega_d|\, W(d).$$

Wir betrachten nun V in den Intervallen $\lambda \leq Q_0 \leq Q \leq z^2$ und setzen dabei voraus, dass $Q/z \geq 500$, $z \geq \exp(18)$ und $X \geq ez^2$. Sei c_1 eine obere Schranke für $G(z\sqrt{Q_0})/G(z)$ und c_2 eine obere Schranke für $G(z\sqrt{Q})/G(z)$. Schließlich sei $\rho = \sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ die Konstante aus Lemma 4.10.1.

Lemma 4.10.4.

$$V(\lambda, Q_0) \leq 30.31 c_1 \left\{ X\lambda^{-7/10} + \frac{20}{13} Q_0^{13/10} \right\}.$$

Beweis. Wir verwenden Lemma 4.5.5 um

$$|G(z)\omega_d| \leq 30.31 d^{-7/10} c_1$$

zu erhalten. Das Lemma folgt aus Lemma 4.10.2 mit partieller Integration.

$$\begin{aligned}
V(\lambda, Q_0) &= W(Q_0)\, 30.31\, Q_0^{-7/10} c_1 - W(\lambda)\, 30.31\, \lambda^{-7/10} c_1 + \int_\lambda^{Q_0} W(t)\, 30.31\, t^{-17/10} c_1 dt \leq \\
&\leq 30.31 c_1 \left\{ (X + Q_0^2) Q_0^{-7/10} + \frac{7}{10} \int_\lambda^{Q_0} (Xt^{17/10} + t^{3/10}) dt \right\} \leq \\
&\leq 30.31 c_1 \left\{ XQ_0^{-7/10} + Q_0^{13/10} + \left[-Xt^{-7/10} + \frac{7}{13} t^{13/10} \right]_{t=\lambda}^{Q_0} \right\} = \\
&= 30.31 c_1 \left\{ XQ_0^{-7/10} + Q_0^{13/10} - XQ_0^{-7/10} + \frac{7}{13} Q_0^{13/10} + X\lambda^{-7/10} - \frac{7}{13} \lambda^{13/10} \right\} \leq \\
&\leq 30.31 c_1 \left\{ \frac{20}{13} Q_0^{13/10} + X\lambda^{-7/10} \right\}
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.10.5.

$$V(Q_0, Q) \leq c_2 \left\{ 0.1917 XzQ_0^{-1} \log z + 0.1452 Q \log^2 z \right\}.$$

Beweis. Hier verwenden wir Lemma 4.5.6 und erhalten

$$|G(z)\omega_d| \leq \frac{c_2}{d} \sum_{\substack{l|d \\ l\leq z}} \xi(l),$$

wobei $\xi(l) = \prod_{p|l}(2p-3)/(p-1)$. Daher ist

$$V(Q_0, Q) \leq c_2 \sum_{Q_0<d\leq Q} \frac{\mu^2(d)}{d} \sum_{l|d} \xi(l) W(d);$$

und mit dem ersten Teil von Lemma 4.10.3

$$V(Q_0, Q) \leq \left\{ X Q_0^{-1} \sum_{l\leq z} \mu^2(l)\xi(l)\kappa(1/2, l) \right\}$$

Der Rest des Beweises folgt aus Lemma 4.4.8 mit $a = 1/2$. □

Lemma 4.10.6.

$$V(Q, z^2) \leq 0.1566 X Q^{-1} z \left(1.4709 \log \frac{Xz}{\rho Q} + 2.1299 + (\log z + 0.724) \log \frac{z^2}{Q} \right) + 0.3818 \frac{X \log^2 z}{z} \left(\frac{1}{2} + z^{1/2} \right)$$

Beweis. Seien $k_1 = 0.5$ und $k_2 = 1.4709$. Nach Lemma 4.4.5 (1) gilt: $G(y) \leq k_1 \log y^2 + k_2$ für alle $y \geq 1$. Wir verwenden Lemma 4.5.6 um

$$|G(z)\omega_d| \leq \frac{G(z/\sqrt{d})}{G(z)} \sum_{\substack{lmn=d \\ l\leq z, mn\leq z}} \frac{\xi(l)}{\phi(l)} \frac{1}{m\phi(m)} \frac{1}{n}$$

zu schreiben. Dadurch erhalten wir

$$V(Q, z^2) G(z) \leq \sum_{\substack{Q/z<l\leq z \\ m\leq z \\ (m,l)=1}} \frac{\mu^2(l)\xi(l) l}{\phi(l)} \frac{\mu^2(m)}{\phi(m)} \sum_{\substack{Q/(lm)<n\leq z/m \\ (n,lm)=1}} \frac{k_1 \log \frac{z^2}{lmn} + k_2}{lmn} W(lmn).$$

Für die innerste Summe verwenden wir zweimal Lemma 4.10.3, indem wir die zwei Teile aufspalten und getrennt betrachten. Wir erhalten dadurch als obere Schranke für diese Summe

$$\kappa(1/2, lm) \left\{ \frac{X}{Q} \left(k_1 \log \frac{z^2}{Q} + \frac{k_2}{1 + \rho \frac{zQ}{mX}} \right) + \frac{2k_2 X}{\rho z l} \left(\frac{1}{2} + \log \frac{zl}{Q} \right) + \frac{\rho z}{m} \left(k_1 \log \frac{z}{l} + k_1 + k_2 \right) \right\}.$$

An dieser Stelle möchten wir anmerken, dass $1/2 + \log(zl/Q) \leq 1/2 + \log(z^2/Q)$. Deswegen bleiben uns folgende vier Summen, die wir abschätzen müssen:

$$\Sigma_1 = k_1 \log \frac{z^2}{Q} \sum_{Q/z<l\leq z} \frac{X}{Q} \frac{\mu^2(l)\xi(l)l}{\phi(l)} \kappa(1/2,l) \sum_{\substack{m\leq z\\(m,l)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\phi(m)} \kappa(1/2,m)$$

$$\Sigma_2 = \frac{k_2 X}{Q} \sum_{Q/z<l\leq z} \frac{\mu^2(l)\xi(l)l}{\phi(l)} \kappa(1/2,l) \sum_{\substack{m\leq z\\(m,l)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\phi(m)} \frac{\kappa(1/2,m)}{1+\rho\frac{zQ}{mX}}$$

$$\Sigma_3 = k_2 \frac{2X}{\rho z} \left(\frac{1}{2} + \log \frac{z^2}{Q}\right) \sum_{Q/z<l\leq z} \frac{\mu^2(l)\xi(l)}{\phi(l)} \kappa(1/2,l) \sum_{\substack{m\leq z\\(m,l)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\phi(m)} \kappa(1/2,m)$$

$$\Sigma_4 = \rho z \sum_{Q/z<l\leq z} \frac{\mu^2(l)\xi(l)l}{\phi(l)} \kappa(1/2,l) \left(k_1 \log \frac{z}{l} + k_1 + k_2\right) \sum_{\substack{m\leq z\\(m,l)=1}} \frac{\mu^2(m)}{m\phi(m)} \kappa(1/2,m)$$

Nun müssen wir nur noch diese Abschätzungen ausrechnen. Das ist eigentlich hauptsächlich Schreibarbeit.

- **Die Summen über die m:** Mit den Lemmata 4.4.7 und 4.4.8, der Identität

$$\sum_{(m,l)=1} \frac{\mu^2(m)\kappa(1/2,m)}{m\phi(m)} = \frac{5}{6} \prod_{p\geq 2} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \prod_{p|l} \frac{p(p-1)}{1+p(p-1)} \kappa(6/5,l),$$

  und $500 \leq Q/z$ erhalten wir die oberen Schranken:

$$\Sigma_1 = k_1 \frac{X}{Q} \log \frac{z^2}{Q} \frac{3}{4} (2\log z + 1.22) \sum_{500<l\leq z} \frac{\mu^2(l)\xi(l)l}{\phi(l)} \kappa(2/3,l)$$

$$\Sigma_2 = k_2 \frac{X}{Q} \frac{3}{4} \left(\log \frac{Xz}{\rho Q} + 1.22\right) \sum_{500<l\leq z} \frac{\mu^2(l)\xi(l)l}{\phi(l)} \kappa(2/3,l)$$

$$\Sigma_3 = k_2 \frac{2X}{\rho z} \left(\frac{1}{2} + \log \frac{z^2}{Q}\right) \frac{3}{4} (2\log z + 1.22) \sum_{500<l\leq z} \frac{\mu^2(l)\xi(l)}{\phi(l)} \kappa(2/3,l)$$

$$\Sigma_4 = \rho z \frac{5}{6} \prod_{p\geq 2} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \sum_{500<l\leq z} \mu^2(l) f_5(l) \kappa(3/5,l) \left(k_1 \log \frac{z}{l} + k_1 + k_2\right)$$

  mit

$$f_5(l) = \xi(l) \prod_{p|l} \frac{p^2}{1+p(p-1)}.$$

- **Die Summen über die l:** In Lemma 4.4.8 hatten wir,

$$\sum_{l\leq z} \mu^2(l)\xi(l)\kappa(2/3,l) \leq 0.159 z \log z + 0.531 z + 0.222 + 86.2 z^{2/3},$$

andererseits wissen wir, dass $\sum_{l\leq 500}\mu^2(l)\xi(l)\kappa(2/3,l)\geq 9400$, sodass

$$\sum_{500<l\leq z}\mu^2(l)\xi(l)\kappa(2/3,l)\leq 0.159z\log z+0.7446z.$$

Aus Lemma 4.4.8 haben wir

$$\sum_{1<l\leq z}\mu^2(l)\frac{\xi(l)\kappa(2/3,l)}{l}\leq 0.0791\log^2 z+0.689\log z$$

und Lemma 4.4.9 liefert uns

$$\sum_{500<l\leq z}\mu^2(l)f_5(l)\kappa(3/5,l)\left(\frac{1}{2}\log\frac{z}{l}+1.9709\right)\leq 0.514z\log z+2.0823z.$$

Wenn wir alle diese Abschätzungen zusammennehmen erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
&V(Q,z^2)G(z)\\
&\quad\leq\{\frac{3Xz}{4Q}\left[k_2\left(\log\frac{Xz}{\rho Q}+1.448\right)+k_1(2\log z+1.448)\log\frac{z^2}{Q}\right][0.159\log z+0.7446]\\
&\quad\quad+\frac{3}{2\rho}\frac{X}{z}k_2(2\log z+1.448)\left(\frac{1}{2}+\log\frac{z^2}{Q}\right)(0.0791\log z+0.689)\log z\\
&\quad\quad+\rho\frac{5}{6}\prod_p\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)z^2(0.514\log z+2.0823)\}
\end{aligned}$$

- **Die letzten Abschätzungen** Wir erinnern uns, dass $G(z)\geq\log z+1.332582-7.284z^{-1/3}$. Außerdem kann man sehr leicht nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{4}\frac{0.159\log z+0.7446}{G(z)}\leq 0.1566,\\
&\frac{3}{2\rho}k_2\frac{(\log(z^2)+1.448)(0.0791\log z+0.689)}{G(z)\log z}\leq 0.3795
\end{aligned}$$

und

$$\rho\frac{5}{6}\prod_p\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)\frac{0.514\log z+2.0823}{G(z)}\leq 1.251,$$

womit Lemma 4.10.6 bewiesen wäre.

□

4.10.3 Der Beweis von Satz 4.4

Wir suchen nach einer oberen Schranke für $V(\lambda, z^2)$. Dazu schreiben wir

$$V(\lambda, z^2) = V(\lambda, Q_0) + V(Q_0, Q) + V(Q, z^2)$$

und verwenden die Lemmata 4.10.4, 4.10.5 und 4.10.6. Nun müssen wir die Parameter Q und Q_0 bestimmen um eine bestmögliche Abschätzung zu bekommen. Hierzu setzen wir

$$Q = \sqrt{Xz} \geq z^{3/2}$$

Wir haben dann für $\log z\sqrt{Q} \leq \frac{5}{4}\log z + \frac{1}{4}\log X \leq 1.843\log z$. Daher wählen wir $c_2 = 1.843$ mittels Lemma 4.4.5. Dann wird der Faktor, der von Q abhängt, maximal

$$0.3708\sqrt{Xz}\log^2 z.$$

Daraufhin setzen wir

$$Q_0 = \left(\frac{1}{60.62}0.1917\frac{1.843}{1.749}Xz\log z\right)^{10/23}.$$

Jetzt ist $Q_0 \leq (0.00583Xz\log z)^{10/23}$ und somit

$$\begin{aligned}\frac{\log z\sqrt{Q_0}}{\log z} &\leq 1 + \frac{5}{23}\frac{\log(0.00583Xz\log z)}{\log z} \leq \\ &\leq 1.7326 + \frac{5}{23}\frac{\log\log z - 5.144}{\log z} \leq 1.749.\end{aligned}$$

Wir wählen wiederum mit Hilfe von Lemma 4.4.5 $c_1 = 1.749$. Wir können dann verifizieren, dass die Summe der zwei von Q_0 abhängigen Größen weniger als

$$7.464(Xz\log z)^{13/23}$$

ist. Dies beendet unseren Beweis von Satz 4.4

4.10.4 Von Satz 4.4 zur Proposition 4.4

Um nach diesen Strapatzen nun endlich unsere Proposition zu beweisen, wenden wir die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung auf

$$\sum_{\lambda<d\leq z^2} |\omega_d| \sum_{a \bmod^* d} |TU(a/d)|$$

an und trennen T und U indem wir Satz 4.4 darauf anwenden. Wir beschränken uns auf den Hauptterm

$$\left(\frac{\|T\|_2^2\,\|U\|_2^2}{G^2(z)}(1.251)^2 z^4\right)^{\frac{1}{2}},$$

welcher sich mittels Lemma 4.4.11 zu

$$\left(0.5159\frac{X^2}{G^2(z)}\frac{\theta(X)}{X}(1.251)^2\frac{X^2}{15000}\right)^{\frac{1}{2}}\delta^{9/19}$$

reduziert und somit unser gewünschtes $0.0074X^2\delta^{9/19}/G(z)$ liefert.

4.11 Beweis von Satz 4.2

Wir nehmen nun die Propositionen 4.1, 4.2, 4.3 und 4.4 und erhalten dann:

$$0.478\frac{X^2}{\log X} \leq \frac{X^2}{G(z)}\left\{\delta + \frac{0.232}{G(z)}\delta^{36/37} + 0.4\delta^{9/19} + 0.0008\right\}$$

Aus Lemma 4.4.4 haben wir $0.4683\log X \leq G(z)$ und $31.37 \leq G(z)$ und somit

$$0 \leq \delta + 0.00740\delta^{36/37} + 0.04\delta^{9/19} - 0.2230.$$

Diese Funktion ist steigend in δ und negativ für $\delta \geq 1/(2\cdot 2.48)$. Daraus folgt unmittelbar unser Satz.

4.12 Beweis von Satz 4.1

Wir sind nun an dem Punkt angelangt, an dem wir aus Satz 4.2 und Satz 3.10 auf unsere zentrale Aussage schließen können. Wir müssen nur noch die Parameter richtig wählen und loslegen. Also sei A die Menge aller Zahlen $(g-6)/2$, wobei g eine Darstellung als Summe zweier ungerader Primzahlen hat. Sei $H = 3$, $K = 39$ $\sigma = \frac{7}{20}$ und $2n_0 = 1.002\cdot 10^{30}$. Es gilt $2n_0 \geq 8\exp(67)$ und für $Y \geq n_0$,

$$A(Y) = \sum_{k=0}^{2}\left(A(Y2^{-k}) - A(Y2^{-k-1}\right) + A(Y/8)$$

und somit

$$A(Y) \geq \sum_{k=0}^{2}\left(\sum_{\substack{\frac{Y}{2^k}+3<n\leq 2(\frac{Y}{2^k}+3)\\ r(n)\neq 0}} 1 - 2\right) + 10^{12} - 3.$$

Letzteres folgt aus $A(Y/8) \geq A(10^{12}-3) = 10^{12}-3$ nach einem Resultat in [14]. Damit können wir Satz 4.2 anwenden und erhalten

$$A(Y) \geq \frac{7}{20}Y + \frac{K(K+1)}{2}(H-1).$$

Für die restlichen Zahlen verwenden wir einen greedy Algorithmus. Hierzu sei N eine gerade ganze Zahl kleiner als $6n_0$, dann können wir aus [22] die Funktion f_7 verwenden, sodass das Intervall $[(N-3)-f_7(N-3), N-3]$ zumindest eine Primzahl p_1 enthält. Das Problem hierbei ist, dass f_7 nicht zwingendermaßen nicht-fallend ist. Deswegen kreieren wir eine Funkton f_8, die die größte Funktion ist, die nicht-fallend und kleiner als f_7 ist. Dann ist $N - p_1$ kleiner als $f_8(N-3) \leq f_8(6n_0)$. Wenn wir diesen Prozess nun vier Mal iterieren, gelangen wir zu einer ganzen Zahl M, die kleiner als $2 \cdot 10^{10}$ ist. Daher ist entweder M gerade und nach [14] Summe zweier Primzahlen, oder M ist ungerade, dann haben wir nur drei Primzahlen gebraucht und M ist Summe von drei weiteren Primzahlen.

Anhang A

Anhang

A.1 Partielle Summation

Dies ist eines der wichtigsten Hilfmittel der analytischen Zahlentheorie. Wir sind zumeinst an Summenformeln interessiert, die über die ganzen Zahlen gehen. Da es aber leichter ist zu integrieren, versuchen wir diese Summen in Integrale überzuführen, den Integranten abzuschätzen und somit die Summe asympthotisch zu berechnen. Dabei greifen wir oft auf die partielle Summation zurück. Hier verblüfft ihre Allgemeinheit. Zuerst wollen wir zeigen, wie groß der Fehler beim Ersetzen einer Summe durch ihr Integral ist.

Satz A.1. *Seien a und b ganz mit $a < b$. Sei $f(t)$ monoton auf dem Intervall $[a, b]$. Dann gilt*

$$\min(f(a), f(b)) \leq \sum_{n=a}^{b} f(n) - \int_a^b f(t)dt \leq \max(f(a), f(b)).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(t)$ steigend auf $[a, b]$. Dann gilt

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt$$

Daraus folgt unmittelbar

$$f(a) + \int_a^b f(t)dt \leq f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n) = \sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) \leq f(b) + \int_a^b f(t)dt.$$

□

In diesem Fall war von entscheidender Bedeutung, dass die Funktion monoton ist. Da wir dies aber nicht immer gewährleisten können, brauchen wir eine allgemeinere Formulierung.

Satz A.2 (Partielle Summation)**.** *Seien $u(n)$ und $f(n)$ Funktionen von den natürlichen Zahlen in die Komplexen Zahlen. Sei $U(x)$ die Summenfunktion von $u(n)$, also*

$$U(x) = \sum_{n \leq x} u(n).$$

Seien x und y reelle Zahlen mit $0 \leq y < x$ und sei $f(t)$ eine Funktion mit stetiger Ableitung auf dem Intervall $[y, x]$, dann gilt

$$\sum_{y<n\leq x}^{b} u(n)f(n) = U(x)f(x) - U(y)f(y) - \int_y^x U(t)f'(t)dt.$$

Beweis. Da $f(t)$ stetig differenzierbar auf $[y, x]$ ist und $U(n)$ eine Treppenfunktion ist, gilt

$$U(n)(f(n+1) - f(n)) = \int_n^{n+1} U(t)f'(t)dt.$$

Wir setzen $a = [y]$ und $b = [x]$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} u(n)f(n) &= \sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n) = \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} (U(n) - U(n-1))f(n) = \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} U(n)f(n) - \sum_{n=a}^{b-1} U(n)f(n+1) = \\
&= U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)(f(n+1) - f(n)) = \\
&= U(x)f(b) - U(y)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} \int_n^{n+1} U(t)f'(t)dt = \\
&= U(x)f(x) - U(y)f(y) - U(x)(f(x) - f(b)) - U(y)(f(a+1) - f(y)) \\
&\quad - \int_{a+1}^{b} U(t)f'(t)dt = \\
&= U(x)f(x) - U(y)f(y) - \int_y^x U(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Wir wollen nun eine Anwendung der Partiellen Summation zeigen, die wir sehr oft brauchen werden. Sie handelt von der abgebrochenen Harmonischen Reihe.

Satz A.3. *Sei*

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt$$

die Eulersche Konstante. Dann gilt

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Beweis. Nachdem $0 \le \{t\} < 1$ für alle t ist, gilt

$$0 < \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt < \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = 1.$$

Damit ist die Eulersche Konstante eindeutig definiert im Intervall $(0,1)$. Wir verwenden die Partielle Summation mit $u(n) = 1$ und $f(t) = 1/t$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n \le x} \frac{1}{n} &= \sum_{n \le x} u(n) f(n) = \\
&= \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{[t]}{t^2} dt = \\
&= 1 - \frac{\{x\}}{x} + \int_1^x \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt = \\
&= \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} - \frac{\{x\}}{x} = \\
&= \log x + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

□

A.2 I(y,T)

Im Zusammenhang mit dem Primzahlsatz haben wir uns vermehrt mit dem Integral

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\alpha - \imath\infty}^{\alpha + \imath\infty} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } y = 1 \text{ und} \\ 1 & \text{für } y > 1 \end{cases} \tag{A.1}$$

beschäftigt, aber nie einen Beweis für die Richtigkeit unserer Annahmen gegeben. Dieser soll an dieser Stelle nachgeholt werden. Dazu zeigen wir:

Lemma A.2.1. *Sei $\delta(y)$ die Funktion auf der rechten Seite von (A.1) und*

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\alpha-\imath T}^{\alpha+\imath T} \frac{y^s}{s} ds.$$

Seien $y > 0$, $c > 0$ und $T > 0$, dann gilt

$$|I(y,T) - \delta(y)| < \begin{cases} y^c \min(1, T^{-1} \left|\log y\right|^{-1}) & \text{für } y \neq 1, \\ cT^{-1} & \text{für } y = 1. \end{cases}$$

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in drei Teile. Hierzu sei zuerst $0 < y < 1$. Nachdem die Funktion y^s/s gleichmäßig in T nach 0 geht für $\sigma \to +\infty$, können wir das Integral durch zwei andere ersetzen und erhalten

$$I(y,T) = -\frac{1}{2\pi\imath}\int_{c+\imath T}^{\infty+\imath T} \frac{y^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi\imath}\int_{c-\imath T}^{\infty-\imath T} \frac{y^s}{s} ds.$$

Nun ist aber

$$\left|\int_{c+\imath T}^{\infty+\imath T} \frac{y^s}{s} ds\right| \leq \frac{1}{T}\int_c^\infty y^\sigma d\sigma = \frac{y^c}{T\left|\log y\right|}$$

und es folgt der erste Teil. Die andere Abschätzung erhalten wir, indem wir das vertikale Integral durch einen Halbkreis mit Mittelpunkt in 0 auf der rechten Seite ersetzen. Der Radius ist dann $R = (c^2 + T^2)^{\frac{1}{2}}$ und auf dem Kreis ist die Funktion mit $|y^s| \leq y^c$ und $|s| = R$ beschränkt. Damit ergibt sich

$$|I(y,T)| \leq \frac{1}{2\pi}\pi R \frac{y^c}{R} < y^c.$$

Die zweite Abschätzung ist damit gezeigt.
Für $y > 1$ verwenden wir genauso einen Halbkreis, nur dieses Mal auf der linken Seite. Dabei müssen wir beachten, dass wir den Pol $s = 0$ umrunden und somit das Residuum berechnen. Dieses ist aber genau $\delta(y) = 1$.
Es bleibt noch $y = 1$ zu zeigen, doch dies können wir direkt ausrechnen, indem wir $s = c+\imath t$ setzen. Wir erhalten dann

$$I(1,T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{2c}{c^2+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{T/c}\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{T/c}^\infty \frac{du}{1+u^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{T}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

A.3 Arithmetische Funktionen

Eine arithmetische Funktion ist eine Funktion f von den natürlichen Zahlen in den Körper der Komplexen Zahlen. Diese bilden einen assoziativen Ring mit den folgenden inneren Verknüpfungen. Seien f und g arithmetische Funktionen dann:

$$
\begin{aligned}
+ &: (f+g)(n) = f(n) + g(n) \\
\star &: (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)
\end{aligned}
$$

Letztere hat auch den Namen "Dirichlet'sche Faltung". Der Beweis der Assoziativität sei dem Leser überlassen.
Das neutrale Element bezüglich der Addition ist die Nullfunktion und bezüglich der Faltung die Funktion

$$
\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Der Beweis sei dem Leser überlassen.
Eine häufige Konvention ist auch, wenn wir für eine arithmetische Funktion f ihre Summenfunktion mit dem entsprechenden Großbuchstaben bezeichnen, also:

$$
F(x) = \sum_{n \le x} f(n)
$$

Beispiele für arithmetische Funktionen sind

$$
\begin{aligned}
\phi(n) &= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) && \textit{Eulers Funktion} \\
\omega(n) &= \sum_{p|n} 1 && \textit{Anzahl der Primteiler von } n \\
d(n) &= \sum_{d|n} 1 && \textit{Anzahl der Teiler von } n
\end{aligned}
$$

A.3.1 Multiplikativität

Definition A.3.1. Eine Funktion f heißt multiplikativ, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $(m, n) = 1$ gilt

$$
f(nm) = f(n)f(m). \tag{A.2}
$$

f heißt streng multiplikativ, wenn (A.2) auch für nicht relativ prime $m, n \in \mathbb{N}$ gilt.

Diese Funktionen spielen eine zetrale Rolle in allen Beweisen rund um Primzahlen. Damit ist es möglich, die Funktionsdefinitionen auf Primzahlen zu reduzieren und diese dann getrennt zu betrachten. Der Primzahlsatz gibt uns dann Aufschluss, wieviele Primzahlen sich in diesem Intervall befinden und somit können wir die Funktion geeignet abschätzen. Aus der Multiplikativität folgt

Satz A.4. *Sei f eine multiplikative Funktion, dann gilt*

$$f([m,n])f((m,n)) = f(m)f(n).$$

Beweisskizze. Man zerlegt einfach m und n in Primzahlen und benutzt die Darstellung von kgV und ggT mittels Primzahlen. Der Rest folgt dann aus der Multiplikativität. □

A.3.2 Die Möbius-Funktion und die Möbius'sche Inversionsformel

Die Möbiusfunktion sei definiert durch

Definition A.3.2 (Möbiusfunktion)**.**

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ r & \text{falls } n = p_1 p_2 \dots p_r \text{ mit } p_i \text{ prim}, \\ 0 & \text{falls ein } p \text{ prim existiert mit } p^2 \mid n. \end{cases}$$

Eine wichtige Funktion ist auch die

$$1(n) = 1.$$

Wir zeigen nun, dass

$$\mu \star 1 = \delta$$

Satz A.5.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } n = 1, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir schreiben n als

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} &= \sum_{d|p_1 \cdot p_r} \mu(d) = \\ &= \sum_{d|p_1 \cdot p_r} (-1)^{\omega(d)} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Wir können nun folgenden Satz beweisen

Satz A.6 (Möbius'sche Inversionsformel)**.** *Seien $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen über den Reellen Zahlen $x \geq 1$. Dann gilt*

$$g(x) = \sum_{d \leq x} f(x/d) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{d \leq x} \mu(d) g(x/d).$$

Eine unmittlebare Folgerung ist folgendes Korollar

Korollar A.6.1. *Seien $f(n)$ und $g(n)$ arithmetische Funktionen, dann gilt*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) g(d).$$

Beweis. Sei $f(x)$ eine Funktion über den Reellen Zahlen für $x \geq 1$. Sei

$$g(x) = \sum_{d \leq x} f(x/d),$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{d \leq x} \mu(d) g(x/d) &= \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{d' \leq x/d} f(x/dd') = \\
&= \sum_{dd' \leq x} \mu(d) f(x/dd') = \\
&= \sum_{m \leq x} f(x/m) \sum_{d|m} \mu(d) = \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Der Beweis der anderen Richtung ist analog. □

A.3.3 Die Euler'sche Funktion $\phi(n)$

An dieser Stelle wollen wir die Euler'sche Funktion abschätzen. Eine untere Abschätzung gibt uns das

Lemma A.3.1.

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\phi(n)} > \log x$$

Beweis.

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\phi(n)} > \sum_{n\le x}\frac{1}{n} > \log x$$

□

Die obere ist auch sehr leicht einsichtig.

Satz A.7.

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\phi(n)} \ll \log x.$$

Beweis. Mit d^* bezeichnen wir nun den quadratfreien Anteil von d, also

$$d^* = \prod_{p|d} p.$$

Damit haben wir

$$\frac{1}{\phi(n)} = \frac{1}{n}\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{\substack{d=1\\ d^*|n}}^{\infty}\frac{1}{d}$$

und somit

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{1}{\phi(n)} &= \sum_{n\le x}\frac{1}{n}\sum_{\substack{d=1\\ d^*|n}}^{\infty}\frac{1}{d}\\ &= \sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d}\sum_{\substack{n\le x\\ d^*|n}}\frac{1}{n}\\ &= \sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d}\sum_{m\le x/d^*}\frac{1}{d^*m}\\ &\ll \sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{dd^*}\log x.\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass die Summe nur ein $\mathcal{O}(1)$ ist. Das ist nicht schwer, da dd^* jeden Primteiler zumindest als Quadrat enthält. Damit ist es sehr leicht zu zeigen, dass die

Summe konvergiert:

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{dd^*} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \\ &= \mathcal{O}(1).\end{aligned}$$

□

A.3.4 Die Teilerfunktion $d(n)$

Um die Teilerfunktion und ihre Kompositionen abzuschätzen verwenden wir oft auch die Summenfunktion der Teilerfunktion D. Wir beginnen gleich, diese asymptotisch zu analysieren

Satz A.8.

$$D(x) = \sum_{n \le x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \mathcal{O}(\sqrt{x}).$$

Beweis. Die Idee in diesem Beweis ist es, $d(n)$ zu schreiben als

$$d(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{n=uv} 1.$$

Wir können nun u und v in drei Klassen teilen:

$$\begin{aligned}&1 : 1 \le u \le \sqrt{x} \text{ und } 1 \le v \le \sqrt{x}, \\ &2 : 1 \le u \le \sqrt{x} \text{ und } \sqrt{x} < v \le x/u, \\ &3 : 1 \le v \le \sqrt{x} \text{ und } \sqrt{x} < u \le x/v.\end{aligned}$$

Diese Klassen sind alle disjunkt und deshalb können wir schreiben:

$$
\begin{aligned}
D(x) &= [\sqrt{x}]^2 + \sum_{1\le u\le\sqrt{x}} \left(\left[\frac{x}{u}\right] - [\sqrt{x}]\right) + \sum_{1\le v\le\sqrt{x}} \left(\left[\frac{x}{v}\right] - [\sqrt{x}]\right) = \\
&= 2 \sum_{1\le u\le\sqrt{x}} \left[\frac{x}{u}\right] - [\sqrt{x}]^2 = \\
&= 2x \sum_{1\le u\le\sqrt{x}} \frac{1}{u} - 2 \sum_{1\le u\le\sqrt{x}} \left\{\frac{x}{u}\right\} - x + \mathcal{O}(\sqrt{x}) = \\
&= 2x \left(\log\sqrt{x} + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - x + \mathcal{O}(\sqrt{x}) = \\
&= x\log x + (2\gamma - 1)x + \mathcal{O}(\sqrt{x}).
\end{aligned}
$$

□

Lemma A.3.2.

$$
\sum_{n\le x} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2}\log^2 x + \mathcal{O}(\log x).
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\le x} \frac{d(n)}{n} &= \frac{D(x)}{x} + \int_1^x \frac{D(t)}{t^2} dt = \\
&= \frac{x\log x + \mathcal{O}(x)}{x} + \int_1^x \frac{t\log t + \mathcal{O}(t)}{t^2} dt = \\
&= \log x + \mathcal{O}(1) + \int_1^x \frac{\log t}{t} dt + \mathcal{O}\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) = \\
&= \frac{1}{2}\log^2 x + \mathcal{O}(\log x).
\end{aligned}
$$

□

Wir können nun eine weitere asympthotische Formel für die Teilerfunktion, genauer gesagt für die Summe der Quadrate derselbigen, zeigen. Diese haben wir im Beweis vom Satz von Bombieri-Vinogradov (Satz 2.2) gebraucht.

Satz A.9.

$$
\sum_{n\le x} d(n)^2 \ll x\log^3 x.
$$

Beweis. Wir verwenden hier die Eigenschaft, dass $d(ab) \le d(a)d(b)$ ist und zerlegen das Quadrat.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} d(n)^2 &= \sum_{n\leq x} d(n) \sum_{n=ab} 1 = \\
&= \sum_{ab\leq x} d(ab) \leq \\
&\leq \sum_{ab\leq x} d(a)d(b) = \\
&= \sum_{a\leq x} d(a) \sum_{b\leq x/a} d(b) = \\
&= \sum_{a\leq x} d(a) \left(\left(\frac{x}{a}\right) \log\left(\frac{x}{a}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{a}\right)\right) \leq \\
&\leq x \log x \sum_{a\leq x} \frac{d(a)}{a} + \mathcal{O}\left(x \sum_{a\leq x} \frac{d(a)}{a} \right) \ll \\
&\ll x \log^3 x
\end{aligned}$$

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] Boas, Jr., R. P.: A general moment problem. Amer. J. Math., 63:361–370, 1941.

[2] Bombieri, E.: On the large sieve. Mathematatika, 12:201–225, 1965.

[3] Bombieri, E. und H. Davenport: Some inequalities involving trigonometrical polynomials. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 23:223–241, 1969.

[4] Davenport, H.: Multiplicative number theory, Bd. 74 d. Reihe Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, Second Aufl., 1980. Revised by Hugh L. Montgomery.

[5] Davenport, H. und H. Halberstam: Corrigendum and addendum: "The values of a trigonometrical polynomial at well spaced points". Mathematika, 14:229–232, 1967.

[6] Gallagher, P. X.: The large sieve. Mathematika, 14:14–20, 1967.

[7] Gallagher, P. X.: Bombieri's mean value theorem. Mathematika, 15:1–6, 1968.

[8] Greaves, G.: Sieves in number theory, Bd. 43 d. Reihe Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[9] Halberstam, H. und H.-E. Richert: Sieve methods. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974. London Mathematical Society Monographs, No. 4.

[10] Halberstam, H. und K. F. Roth: Sequences. Springer-Verlag, New York, Second Aufl., 1983.

[11] Hardy, G. H., J. E. Littlewood und G. Pólya: Inequalities. Cambridge, at the University Press, 1952. 2d ed.

[12] Klimov, N. I.: Apropos the computations of Šnirel′man's constant. Volž. Mat. Sb. Vyp., 7:32–40, 1969.

[13] Linnik, U. V.: "The large sieve.". C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.), 30:292–294, 1941.

[14] Mollin, R. A. (Hrsg.): Number theory and applications, Bd. 265 d. Reihe NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences, Dordrecht, 1989. Kluwer Academic Publishers Group.

[15] Montgomery, H. L. und R. C. Vaughan: The large sieve. Mathematika, 20:119–134, 1973.

[16] Montgomery, H. L. und R. C. Vaughan: The exceptional set in Goldbach's problem. Acta Arith., 27:353–370, 1975. Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik.

[17] Montgomery, H. L. und R. C. Vaughan: Exponential sums with multiplicative coefficients. Invent. Math., 43(1):69–82, 1977.

[18] Nathanson, M. B.: Additive number theory, Bd. 164 d. Reihe Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1996. The classical bases.

[19] Preissmann, E.: Sur une inégalité de Montgomery-Vaughan. Enseign. Math. (2), 30(1-2):95–113, 1984.

[20] Ramaré, O.: On Šnirel′man's constant. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 22(4):645–706, 1995.

[21] Ramaré, O. und R. Rumely: Primes in arithmetic progressions. Math. Comp., 65(213):397–425, 1996.

[22] Ramaré, O. und Y. Saouter: Short effective intervals containing primes. J. Number Theory, 98(1):10–33, 2003.

[23] Riesel, H. und R. C. Vaughan: On sums of primes. Ark. Mat., 21(1):46–74, 1983.

[24] Rosser, J. B. und L. Schoenfeld: Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. Math., 6:64–94, 1962.

[25] Roth, K. F.: On the large sieves of Linnik and Rényi. Mathematika, 12:1–9, 1965.

[26] Schoenfeld, L.: Corrigendum: "Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II" (Math. Comput. **30** (1976), no. 134, 337–360). Math. Comp., 30(136):900, 1976.

[27] Schoenfeld, L.: Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II. Math. Comp., 30(134):337–360, 1976.

[28] Schur, I.: Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn *G. Pólya*: Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste.. Gött. Nachr., S. 30–36, 1918.

[29] Shapiro, H. N. und J. Warga: On the representation of large integers as sums of primes. I. Comm. Pure Appl. Math., 3:153–176, 1950.

[30] Vaughan, R. C.: On Goldbach's problem. Acta Arith., 22:21–48, 1972.