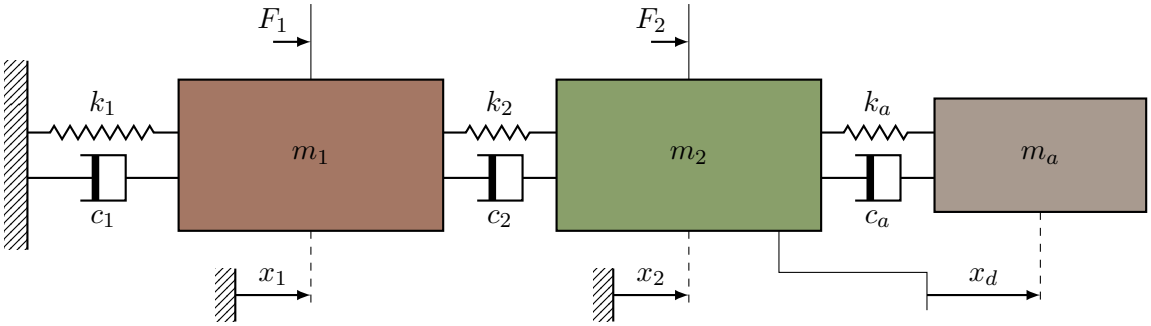
Maschinendynamik



Skriptum

Erika Hausenblas und Manfred Madritsch

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik

Montanuniversität Leoben

Version: 27. Januar 2026

Achtung:
Schicken Sie Vorschläge und Korrekturen an
manfred.madritsch@unileoben.ac.at.

Dieses Skriptum wurde von Erika Hausenblas und Manfred Madritsch basierend auf jenem von **Clemens Brand** erstellt.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Freie Schwingungen 5
1. Einführung 5
2. Ungedämpfte freie Schwingung 11
3. Gedämpfte freie Schwingung 16
4. Galerie zur Schwingungslehre 23
5. Testfragen 26

Kapitel 2. Harmonische Erregerkräfte 27
1. Ungedämpfte erzwungene Schwingungen 28
2. Gedämpfte erzwungene Schwingung 31
3. Resonanz 35
4. Resonanzschärfe 38
5. Anwendungsbeispiele 39
6. Ergänzendes Material 45

Kapitel 3. Allgemeine Erregerkräfte 53
1. Sprunghafte Erregung 53
2. Stoßartige Erregung 56
3. Fundamentallösungen 57
4. Beispiele 59
5. Erregung durch periodische Funktionen 68
6. Übertragungsfunktion 70
Testfragen 75

Kapitel 4. Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden 77
1. Systeme mit zwei Freiheitsgraden 77
2. Massen-, Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix 83
3. Allgemeine Form der Schwingungsgleichung 86
4. Der dynamische Schwingungstilger 89
5. Der dynamische Schwingungstilger mit Dämpfung 92

Kapitel 5. Nichtlineare Systeme 97
1. Phasenraum autonomer Systeme 97
2. Energiemethode 100
3. Das mathematische Pendel 101
4. Schwache Federn 104
5. Coulombdämpfung 107
6. Reibschwinger 109

Kapitel 6. Schwingungen von Kontinua 113

1. Einführung 113
2. Wellengleichung 113
3. Schwingung einer Saite oder eines Kabels 116
4. Balkenbiegeschwingungen 126
5. Biegeschwingungen eines Balkens, Rayleigh-Quotient 131

Kapitel 7. Parametererregte Schwingungen 135
1. Berechnung eines Schaukelsschwinger 136
2. Ein parametrischer Oszillator 139
3. Ein Schubkurbelgetriebe 142

Anhang A. Distributionen 145
1. Die Menge der Testfunktionen 145
2. Die Menge der Distributionen 146
3. Beispiele für Distributionen 147
4. Ableitung einer Distribution 149

Anhang B. Fourier-Analysis 151
1. Trigonometrische Polynome 151
2. Fourier-Reihe 153
3. Fourier-Transformation 160

Index 165

Literaturverzeichnis 167

KAPITEL 1

Freie Schwingungen

1. Einführung

Das Thema dieses Kapitels sind freie Schwingungen linearer Systeme mit einem Freiheitsgrad. Dazu zählen wir

- *ungedämpfte freie* Schwingungen,
- *gedämpfte freie* Schwingungen, wobei wir
  - die *unterkritische* Dämpfung,
  - die *kritische* Dämpfung und
  - die *überkritische* Dämpfung unterscheiden.

Die nächsten beiden Kapitel werden *erzwungene* Schwingungen behandeln; während Kapitel **??** auf *nichtlineare* Systeme eingeht.

1.1. Kräftegleichgewicht, Größen und Einheiten. Gegeben sei das in Abbildung 1.1 dargestellte System, bestehend aus einer MASSE m, einer FEDER k und einem DÄMPFUNGSGLIED c. Wird die Masse um die von der Zeit t abhängige Größe $x(t)$ aus der Ruhelage ausgelenkt, treten mehrere zeitabhängige Kräfte auf: die FEDERKRAFT $kx(t)$, die DÄMPFUNGSKRAFT $c\dot{x}(t)$, und die TRÄGHEITSKRAFT $m\ddot{x}(t)$. Dabei bezeichnet m die MASSE, c die DÄMPFUNGSKONSTANTE und k die FEDERKONSTANTE.
Wir haben für Feder- und Dämpfungskraft *lineare* Ansätze verwendet: erstens, weil nur so die Gleichungen leicht lösbar sind, und zweitens, weil diese Annahmen vernünftig und berechtigt sind. Das HOOKEsche Gesetz besagt „Federkraft proportional Auslenkung“, also $F = kx$. Die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung heißt auch *viskose Dämpfung*; ein typisches Beispiel, wo sie auftritt, ist ein einfacher hydraulischer Stoßdämpfer. Andere Ansätze für den Dämfungsterm wären beispielsweise *Coulombsche Reibung* (konstanter Betrag) oder *turbulenter Strömungswiderstand* (proportional v^2).

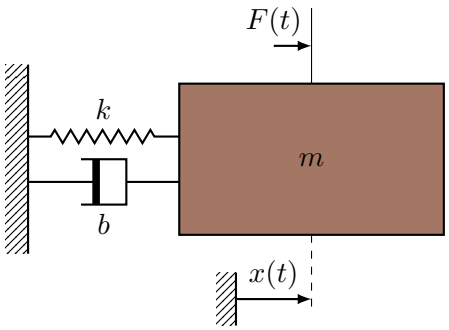


ABBILDUNG 1.1. Feder-Masse System mit Dämpfung

Diese Kräfte wirken gegen die Bewegungsrichtung. Für eine in der Bewegungsrichtung wirkende AUFGEPRÄGTE KRAFT (auch: EREGERKRAFT) $F(t)$ erhalten wir daher folgendes Kräftegleichgewicht (NEWTONSCHES GESETZ):

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Wenn aus dem Zusammenhang heraus klar ist, dass Auslenkung $x(t)$, Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$, Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ und aufgeprägte Kraft $F(t)$ zeitabhängige Funktionen sind, lassen wir das Funktionsargument der Einfachheit halber oft weg. Wir schreiben dann:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \tag{1.1}$$

Formelzeichen und Einheiten in dieser Gleichung:

Bedeutung	**Formelzeichen**	**Einheit**
Auslenkung, Weg	x	m
Geschwindigkeit	$\dot{x}$	m/s
Beschleunigung	$\ddot{x}$	$\mathrm{m/s^2}$
Masse	m	kg
Dämpfungskoeffizient	b	$\frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m}}$
Federkonstante	k	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
Erregerkraft	F	N

Eine große Zahl von Problemen kann man durch Einführung geeigneter Koordinaten und Formfaktoren auf diese einfache Gestalt bringen. Es gilt nämlich: Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage eines Systems gehorchen (bei einem Freiheitsgrad) näherungsweise der Gleichung 1.1. Lineare Systeme mit mehreren Freiheitsgraden gehorchen einer Matrix-Vektor-Version von Gleichung 1.1 (kommt in Kapitel **??**).
Ein System mit der Eigenschaft „Rücktreibende Kraft proportional Auslenkung“ heißt *harmonischer Oszillator*. Es ist eines der wichtigsten Modelle der Mechanik und der Physik überhaupt. Ein nicht-mechanisches Beispiel: für den Strom $I(t)$ in einen elektrischen Schwingkreis mit Induktivitäl L, ohmschen Widerstand R und Kapazität C in Serienschaltung gilt $L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$, das entspricht bis auf die Benennung der Variablen wiederum Gleichung 1.1. Wir diskutieren die Lösungen dieser Gleichung daher ausführlich.

1.2. Freie und erzwungene Schwingungen. Zunächst sei $F(t) = 0$. Man spricht in diesem Fall von FREIEN SCHWINGUNGEN. Dann hat (1.1) die Gestalt

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0\ . \tag{1.2}$$

Im Gegensatz dazu beschreibt die Differentialgleichung (1.1) eine ERZWUNGENE SCHWINGUNG.

1.3. Mathematischer Hintergrund – wichtige Begriffe.

Mathematisch gesehen geht es in diesem Kapitel um *lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.* Wir fassen die grundlegenden Begriffe und Definitionen kurz zusammen.

- **Gewöhnliche Differentialgleichung:** Eine Differentialgleichung, bei der nur Ableitungen nach *einer* unabhängigen Variablen auftreten. In unserem Fall ist die unabhängige Variable die Zeit t; die gesuchte Funktion ist normaler Weise die Auslenkung $x(t)$ als Funktion der Zeit. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen treten bei *partiellen Differentialgleichungen* Ableitungen nach zwei oder mehr unabhängigen Variablen auf.
- **Ordnung einer Differentialgleichung:** Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung. Die Bewegungsgleichungen der Mechanik sind immer von (zeitlich) zweiter Ordnung. Bei Schwingungen kontinuierlicher Systeme (z. B. Balkenschwingung) können hingegen partielle Differentialgleichungen mit räumlichen Ableitungen vierter Ordnung oder gemischte Ableitungen mit räumlich und zeitlich zweiter Ordnung auftreten.
- **Lineare gewöhnliche Differentialgleichung:** Diese Gleichung hat für eine gesuchte Funktion $x(t)$ die allgemeine Form

  $$a_n(t)x^{(n)}(t) + \cdots + a_2(t)\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = s(t),$$

  wobei $a_0, \ldots, a_n$ und s beliebige Funktionen sind.

  Bei Schwingungen von Systemen mit einem oder mehreren Freiheitsgraden treten nur lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf, also Gleichungen der Form

  $$a_2(t)\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = s(t)$$

  Die gegebenen Funktionen $a_0(t), a_1(t), \ldots a_n(t)$ heißen die *Koeffizienten* der entsprechenden Ableitungen. Die gegebene Funktion $s(t)$ auf der rechten Seite heißt *Störfunktion* oder *Inhomogenität*.
- **Lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:** Ein spezieller, einfacher, aber wichtiger Fall liegt vor, wenn die Koeffizienten $a_0(t)$, $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ konstante Funktionen sind. In diesem Fall schreibt man missbräuchlich auch $a_k(t) = a_k$ mit rellem a_k für $0 \leq k \leq n$. In diesem Fall lässt sich die analytische Lösung immer durch einen Exponentialansatz finden.

  Wenn die Koeffizienten jedoch von der Zeit abhängen, ist die Situation mathematisch deutlich komplexer. Wir diskutieren Spezialfälle, sogenannte *parametererregte Systeme*, in einem späteren Abschnitt.
- **Homogene/inhomogene Gleichung:** Ist die Störfunktion $s \equiv 0$ identisch gleich Null, spricht man von einer homogenen Gleichung, andernfalls von einer inhomogenen Gleichung. Bei einer inhomogenen Gleichung mit Störfunktion $s \not\equiv 0$ bezeichnet man die zugehörige Gleichung, in welcher die Störfunktion identisch gleich Null gesetzt wird, als zugehörige homogene Gleichung.
- **Superpositionsprinzip:** Dies ist eine wesentliche Eigenschaft linearer Gleichungen. Für homogene lineare Gleichungen gilt: Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen der Gleichung, dann sind auch Summe und reelle Vielfache; oder allgemein: jede *Linearkombination* $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ für beliebige relle α und β ebenfalls Lösungen.

Bei inhomogenen Gleichungen gilt: Löst $x_1(t)$ eine lineare Differentialgleichung mit Störfunktion $s_1(t)$, und löst $x_2(t)$ die Gleichung mit Störfunktion $s_2(t)$ und demselben homogenen Teil, dann löst die Linearkombination $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ die Gleichung mit Störfunktion $\alpha s_1(t) + \beta s_1(t)$ wiederum für beliebige relle α und β.

> Bei linearen Gleichungen lassen sich Lösungen durch Superposition einfacherer Basislösungen zusammenbauen.

- **Fundamentalsystem, allgemeine Lösung:** Ein Satz von linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung, aus dem sich durch Linearkombination alle Lösungen bilden lassen. Mathematiker sagen: Eine Basis des Lösungsraumes. Man kann auch sagen: Aus einem Fundamentalsystem lässt sich die *allgemeine Lösung* angeben; oder: die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination der Basislösungen. Siehe oben: Superpositionsprinzip.
- **Partikuläre Lösung:** (Irgend-) eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

  Es gilt der wichtige Satz:

  > Die allgemeine Lösung einer linearen Gleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung plus (irgend-)einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

  Was ist, wenn man zwei verschiedene partikuläre Lösungen gefunden hat – welche davon setzt man in der allgemeinen Lösung ein? Egal! Es ist deswegen egal, weil auch gilt:

  > Zwei verschiedene partikuläre Lösungen unterscheiden sich nur um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

  (Diese Aussagen gelten übrigens ganz allgemein für lineare Gleichungen – egal ob gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen oder Systeme algebraische Gleichungen!)
- **Lösungsansätze:**

  > Für lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich Lösungen immer mit dem Ansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$ finden.

  Das hat schon Leonhard Euler herausgefunden. Es kann sein, dass sich dabei für λ komplexe Werte ergeben.

  In einfachen Fällen (wenn x und $\ddot{x}$, aber nicht $\dot{x}$ auftreten) genügt auch ein Ansatz $x(t) = \sin(\omega t)$ oder $x(t) = \cos(\omega t)$. Im Normalfall finden diese Ansätze genug linear unabhängige Lösungen, um die allgemeine Lösung anzugeben. In speziellen Fällen (vgl. Seite 20, kritische Dämpfung) ist bei einer Lösung $x(t) = \exp(\lambda t)$ auch $t \exp(\lambda t)$ eine weitere, linear unabhängige Lösung.

  Bei inhomogenen Gleichungen haben wir oben festgestellt, dass es genügt, irgendeine partikuläre Lösung zu finden. Daher versucht man, wenn die Störfunktion eine Winkelfunktion, Exponentialfunktion oder ein Polynom ist, als Ansatzfunktion für die Lösung eine ähnlich aufgebaute Winkelfunktion, Exponentialfunktion oder ein Polynom zu verwenden.

1.4. Eulers E-Ansatz. Der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ ist seit Leonhard Euler der Standard-Ansatz bei homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten; der Wert von $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist zunächst noch unbekannt. Damit wird $\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$ und $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Einsetzen in Gleichung (1.2) liefert

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0.$$

Die Exponentalfunktion hat keine Nullstelle (auch nicht im Komplexen). Das heißt, dass für beliebiges t immer $e^{\lambda t} \neq 0$ (auch für komplexes λ). Daher dürfen wir $e^{\lambda t}$ kürzen und erhalten

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0. \tag{1.3}$$

Nachdem die Koeffizienten m, b und k vorgegeben sind, erhalten wir somit eine quadratische Gleichung in der Unbekannten λ. Ganz allgemein führt der $e^{\lambda t}$-Ansatz jede lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten in eine entsprechende polynomiale Gleichung für λ über. Man nennt die Gleichung (1.3) die CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG der Differentialgeichung (1.2). Lösungen der charakteristischen Gleichung liefern Werte für λ; welche wiederum Funktionen der Form $e^{\lambda t}$ entsprechen. Dies sind dann Lösungen der Diferentialgleichung.
In unserem Fall lauten die Lösungen für λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

und somit die Lösungen der Differentialgleichung

$$x_{1,2}(t) = e^{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4mk}}{2m}\, t}$$

Theoretisch wären wir nun fertig. Aber in dieser Schreibweise lässt sich das Schwingungsverhalten der Lösung nicht direkt erkennen oder einfach interpretieren.
Um Verständnis und anschauliche Interpretation geht es ab jetzt. Es stellt sich heraus: Wenige wichtige Kenngrößen beschreiben das komplette Verhalten der Lösung.

1.5. Kenngrößen der freien Schwingung. Besser als die Werte für m, b und k geben die Kenngrößen

KRITISCHE KREISFREQUENZ	$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}}$
ABKLINGKONSTANTE	$\delta = \frac{b}{2m}$
DÄMPFUNGSGRAD	$D = \frac{\delta}{\omega_k} = \frac{b}{2\sqrt{km}}$

Auskunft über Typ und Eigenschaften der Lösung. Wir setzen m, $k > 0$ und $b \geq 0$ voraus. Dann ist $\frac{k}{m} > 0$ und $\frac{b}{m} \geq 0$. Das heißt, ω_k, δ und D sind wohldefiniert.
Division durch m formt Gleichung (1.2) um in

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Mit den Definitionen für kritische Kreisfrequenz und Abklingkonstante wird daraus

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_k^2 x = 0. \tag{1.4}$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_k^2 = 0. \tag{1.5}$$

Sie ist natürlich äquivalent zur charakteristischen Gleichung (1.3). (Aber es reicht die „kleine Lösungsformel“, die sich manche leichter merken…)

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_k^2}$$

Der Dämpfungsgrad D (heißt auch: Lehrsches[1] Dämpfungsmaß) ist dimensionslos und wird auch in Prozent % angegeben. Mit ihm lauten Differential- und charakteristische Gleichung

$$\ddot{x} + 2D\omega_k\dot{x} + \omega_k^2 x = 0$$
$$\lambda^2 + 2D\omega_k\lambda + \omega_k^2 = 0$$

und die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega_k\sqrt{D^2 - 1}\ .$$

Hier sehen Sie deutlich: Je nachdem, ob $D \geq 1$ oder $D < 1$, sind die λ reell oder komplex. Dem entsprechend verhält sich das System völlig unterschiedlich. Das besprechen wir in den nächsten Kapiteln!
Formelzeichen und Einheiten:

Bedeutung	**Formelzeichen**	**Einheit**
Abklingkonstante	δ	$1/\mathrm{s}$
kritische Kreisfrequenz	ω_k	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$
Dämpfungsgrad	D	1

Die kritische Kreisfrequenz ω_k ist, wie der Name vermuten lässt, ein besonderer Wert, und es werden noch andere Kreisfrequenzen auftreten. Ganz allgemein gilt: Die Kreisfrequenz ω ist das 2π-fache der in Hertz (Hz) gemessenen Frequenz f. Also $\omega = 2\pi f$, oder

Frequenz $$f = \frac{\omega}{2\pi}\ .$$

Den Reziprokwert von f nennt man Schwingungsdauer oder Periode T. Es gilt

Periode $$T = \frac{2\pi}{\omega}\ .$$

1.6. Der Plan für das weitere Vorgehen. Wie im Abschnitt 1.3 erläutert: Die Bewegungsgleichung der erzwungenen Schwingung (1.1) ist inhomogen.
Die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser Gleichung kann als Summe der allgemeinen Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung (1.2) und einer beliebigen partikulären Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung (1.1) dargestellt werden.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)\ .$$

[1] nach Ernst Lehr (1896 – 1945)

Im Folgenden werden wir zuerst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung diskutieren und dann, ab Kapitel 2, die Lösungen der inhomogenen Gleichung für verschiedene Typen von Erregerkräften F.

AUFGABE 1.1. *Was ist eine Schwingung? Je nach Autor und Lehrbuch gibt es verschiedene Definitionen. Schlagen Sie in folgenden Lehrbüchern nach (MUL Online Zugang):*

- *Eberhard Brommundt, Delf Sachau: Schwingungslehre mit Maschinendynamik*
- *Kurt Magnus, Karl Popp, Walter Sextro: Schwingungen*
- *Jürgen Dankert, Helga Dankert: Technische Mechanik (Kapitel 31)*

Konsultieren Sie auch Wikipedia und andere Internet-Quellen. Stellen Sie verschiedene Definitionen zusammen und vergleichen Sie.

AUFGABE 1.2. *$x_1(t)$ und $x_2(t)$ seien Lösungen der homogenen Gleichung 1.2. Man zeige, dass auch $x_1 + x_2$ eine Lösung ist.*

AUFGABE 1.3. *$x(t)$ sei eine Lösung von 1.2 und α eine Konstante. Man zeige, dass auch $\alpha \cdot x(t)$ eine Lösung ist.*

AUFGABE 1.4. *$x_1(t)$ und $x_2(t)$ seien Lösungen der inhomogenen Gleichung 1.1. Man zeige, dass $x_1 - x_2$ eine Lösung von 1.2 ist.*

AUFGABE 1.5. *Im System aus Abbildung 1.1 sei die wirkende Kraft die Schwerkraft. Die Differentialgleichung lautet also: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mg$.*
(a) Berechnen Sie die Lösung $x(t) = x_0 = const$, die der Gleichgewichtslage des Systems entspricht.
(b) Zeigen Sie: Die Koordinatentransformation $y = x - x_0$ führt auf eine homogene Gleichung.
(c) Begründen Sie: ein konstanter Kraftterm auf der rechten Seite der Gleichung 1.1 verschwindet durch geeignete Koordinatentransformation.

2. Ungedämpfte freie Schwingung

Die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung ohne Dämpfung

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{1.6}$$

nennt man ungedämpfte freie Schwingung. Die charakteristische Gleichung (1.5) hat dann die Gestalt

$$\lambda^2 + \omega_k^2 = 0$$

und die Lösungen sind $\lambda = \pm i\omega_k$. Damit hat (1.6) die Fundamentallösungen[2] $e^{i\omega_k t}$ und $e^{-i\omega_k t}$. Die allgemeine Lösung von (1.6) ist daher

$$x(t) = a_1 e^{i\omega_k t} + a_2 e^{-i\omega_k t}. \tag{1.7}$$

[2]Basis des Lösungsraumes – linear unabhängige Lösungen, aus denen sich durch Linearkombination jede mögliche Lösung bilden lässt.

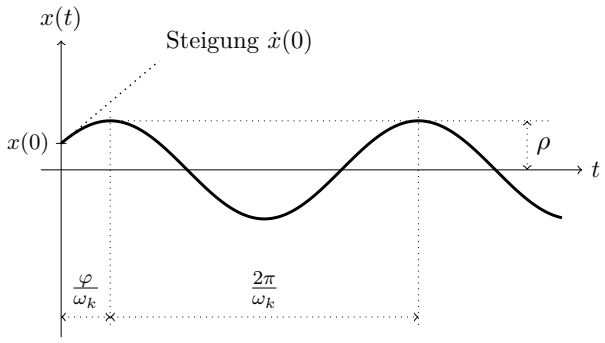


ABBILDUNG 1.2. Ungedämpfte freie Schwingung mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_k}$, Anfangswert $x(0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0)$. Amplitude ρ und Phasenverschiebung φ entsprechend Gleichung 1.12 sind ebenfalls eingetragen.

Mittels der EULERSCHEN FORMEL

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \tag{1.8}$$

erhalten wir mit $\alpha = \pm\omega_k t$ daraus

$$x(t) = (a_1 + a_2)\cos(\omega_k t) + i(a_1 - a_2)\sin(\omega_k t).$$

Wir können die allgemeine Lösung daher auch in der Form

$$x(t) = A\sin(\omega_k t) + B\cos(\omega_k t) \tag{1.9}$$

schreiben. Dabei ist zu beachten, dass ω_k nur von m und k, und A und B von den ANFANGSBEDINGUNGEN, also von den Größen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ abhängen. Es lässt sich leicht nachrechnen:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_k}\sin(\omega_k t) + x(0)\cos(\omega_k t)\ , \tag{1.10}$$

also

$$A = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_k}, \qquad B = x(0)\ . \tag{1.11}$$

Der typische Verlauf einer derartigen ungedämpften freien Schwingung ist in Abbildung 1.2 dargestellt. Man kann $x(t)$ auch auf die Form

$$x(t) = \rho\cos(\omega_k t - \varphi) \tag{1.12}$$

bringen: eine Kosinus-Schwingung mit Amplitude ρ und Phasenverschiebung φ. Für die Umrechnung zwischen den beiden Formen zerlegt man die rechte Seite von Gleichung 1.12 mit den Additionstheoremen der Winkelfunktionen[3]

$$\rho\cos(\omega_k t-\varphi)=\rho\cos(\omega_k t)\cos\varphi+\rho\sin(\omega_k t)\sin\varphi$$

Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite von Gleichung 1.9

$$B\cos(\omega_k t)+A\sin(\omega_k t)=\rho\cos(\omega_k t)\cos\varphi+\rho\sin(\omega_k t)\sin\varphi$$

ergibt

$$\begin{aligned} A &= \rho\sin\varphi,\\ B &= \rho\cos\varphi. \end{aligned}$$

Es ist $A^2+B^2=\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=\rho^2$, also

Umrechnung zwischen den Lösungs-Schreibweisen 1.9 und 1.12 :

$$\rho=\sqrt{A^2+B^2},\qquad \tan\varphi=\frac{A}{B}. \tag{1.13}$$

Achtung beim Auswerten von $\varphi=\arctan(A/B)$: bei Phasenverschiebungen $|\varphi|>\pi/2$, das ist bei negativem B, liefern die meisten Taschenrechner den Winkel in der um $\pm180°$ falschen Richtung! Wenn Sie sich nicht sicher sind, zeichnen Sie in einem Koordinatensystem den Vektor vom Ursprung zum Punkt $x=B, y=A$ und lesen den Winkel zur x-Achse ab. In Programmiersprachen wie C, C++, Java, Python, R oder MATLAB gibt es dazu die Funktion `atan2(A,B)`[4]
Man nennt φ den Phasenwinkel oder die Phasenverschiebung, und ρ die Amplitude. Die Zusammenhänge zwischen $\omega_k t$, ρ, φ, A und B sind aus dem in Abbildung 1.3 dargestellten Zeigerdiagramm zu erkennen. Die Schwingung entspricht hier einem rotierendem Zeiger.

Aufgabe 1.6. *Man kann $x(t)=A\sin(\omega_k t)+B\cos(\omega_k t)$ auch in der Form $x(t)=\rho\sin(\omega_k t+\psi)$ schreiben. Drücken Sie ρ und ψ durch A und B aus.*

Aufgabe 1.7. *Jemand möchte die allgemeine Lösung von Gleichung 1.6 in „besonders allgemeiner Form“ $x(t)=A\sin(\omega_k t+\psi)+B\cos(\omega_k t-\varphi)$ schreiben. Warum ist das keine geniale Idee?*

[3] Additionstheoreme der Winkelfunktionen:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\ ,\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\ .$$

[4] Und für weitere Verwirrung sorgt, dass andere Anwendungen die Reihenfolge der beiden Argumente vertauschen: MATLABs `atan2(A,B)` entspricht in Mathematica `ArcTan[B,A]`, in meiner Version von LibreOffice schreibe ich dafür `ATAN2(B;A)`.

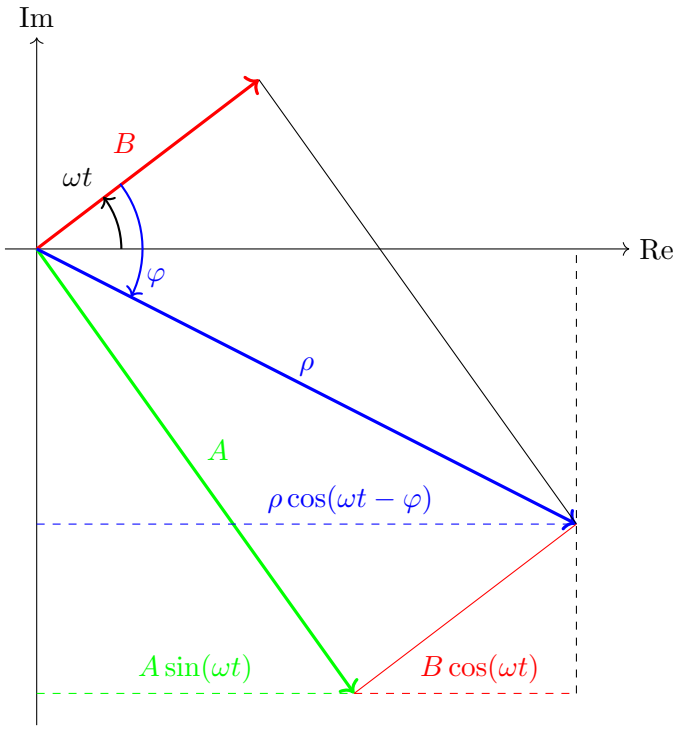


ABBILDUNG 1.3. Das Zeigerdiagramm illustriert in der Projektion auf die reelle Achse die Gleichung $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = \rho\cos(\omega t - \varphi)$. Die Beziehungen $A^2 + B^2 = \rho^2$ und $\tan\varphi = \frac{A}{B}$ lassen sich aus den entsprechenden rechtwinkeligen Dreiecken direkt ablesen.

Zusammenfassung 1.1

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

ist die freie Schwingung

$$x(t) = \rho\,\cos(\omega_k t - \varphi).$$

Dabei hängt die kritische Frequenz

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

nur von m und k ab, die Amplitude ρ und die Phasenverschiebung φ von den Anfangsbedingungen.

Auch die Beziehungen 1.7, 1.9, 1.12und 1.13 wollen wir besonders hervorheben.

Zusammenfassung 1.2

Schwingungen der Form

$$x(t) = a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t} \qquad \text{oder}$$
$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad \text{oder}$$
$$x(t) = \rho\cos(\omega t - \varphi) \qquad \text{oder}$$
$$x(t) = \rho\sin(\omega t + \psi)$$

heißen HARMONISCHE SCHWINGUNGEN.
(Das gilt ganz allgemein, wir schreiben deshalb ω, nicht ω_k.)
Die Summe zweier harmonischer Schwingungen mit gleicher Frequenz ist wieder eine harmonische Schwingung. Insbesondere lässt sich eine Summe aus Sinus- und Cosinusschwingung auf eine einzige Sinus- oder Cosinusschwingung mit Phasenverschiebung umrechnen.

$$A\,\sin(\omega t) + B\,\cos(\omega t) = \rho\,\cos(\omega t - \varphi) = \rho\,\sin(\omega t + \psi)$$

Dabei berechnet sich $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$ nach dem Pythagoräischen Lehrsatz (siehe Zeigerdiagramm) und $\tan\varphi = A/B\,,\ \tan\psi = B/A$.

Sind die Frequenzen verschieden, kann das Ergebnis ganz anders aussehen. Die Summe von zwei harmonischen Funktionen mit nahe beisammen liegenden Frequenzen wird als SCHWEBUNG bezeichnet. Siehe dazu die Schwingungsformen-Galerie im Abschnitt 4.

BEISPIEL 1.1. Der Prellbock auf einem Eisenbahnabstellgleis sei durch eine Feder und ein dazu paralleles, geschwindigkeitsproportionales Dämpfungsglied modelliert. Die Federkonstante sei $2 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Wie groß muss die Dämpfungskonstante sein, damit für einen Waggon von 25.000 kg der Dämpfungsgrad 1,2 ist?

BEISPIEL 1.2. Ein Abfallfass von 50 cm Durchmesser und 60 kg Eigengewicht enthalte Abfall der Dichte $1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Das Fass wird durch ein Stahlkabel von 30 mm Durchmesser ($E = 210 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m^2}$) hochgezogen. Bei einer Seillänge von 10 m wird eine Schwingung des Fasses in senkrechter Richtung von 40 Hz festgestellt. Welches Volumen hat der Abfall im Fass?

Hinweis Die Federkonstante k eines Kabels der Länge ℓ mit dem Durchmesser d und dem ELASTIZITÄTSMODUL E genügt der Beziehung

$$k = \pi\frac{d^2}{4}\frac{E}{\ell}\,.$$

BEISPIEL 1.3. Gegeben sei ein dünner Balken der Masse m. An seinem linkem Ende ist eine Masse M angebracht, rechts wird er durch eine Feder gehalten und laut Skizze 1.4 unterstützt. Der freie Parameter seiner Bewegung sei die Winkelauslenkung φ des Balkens um sein Lager im positiven Drehsinn.
Man stelle die Bewegungsgleichung auf und bestimme die Eigenfrequenz.

BEISPIEL 1.4. Eine zylindrische Boje von 60 cm Durchmesser schwimme mit vertikaler Achse im Wasser. Wird sie ein wenig niedergedrückt und ausgelassen, schwingt sie mit einer Frequenz von 2 Hz auf und ab. Die Schwingung sei ungedämpft, die Dichte vom Wasser $1\,\mathrm{kg/dm^3}$, und die Erdbeschleunigung 10 m/s.
Wie schwer ist die Boje?

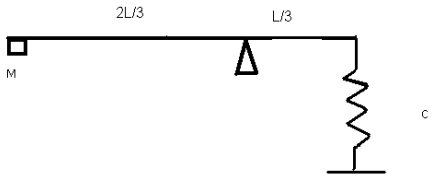


ABBILDUNG 1.4. Balken mit Feder

AUFGABE 1.8. *In einem Feder-Masse-System bewirkt das Eigengewicht der Masse eine Dehnung d. Geben Sie eine Formel für die Schwingungsperiode in Abhängigkeit von d und der Fallbeschleunigung g an.*

AUFGABE 1.9. *Ein* $300\,\mathrm{kg}$*-Block steht auf vier gleichartigen Federn der Steifigkeit* $2{,}3{\cdot}10^5\,\mathrm{N/m}$. *Man bestimme die kritische Frequenz in Hertz.*

AUFGABE 1.10. *Gegeben seien die Anfangsbedingungen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ einer ungedämpften freien Schwingung mit der Eigenfrequenz ω_k. Leiten Sie die Beziehung*

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_k}\sin(\omega_k t) + x(0)\cos(\omega_k t)$$

her.

AUFGABE 1.11. *Man berechne die Lösung der Gleichung 1.6 für vorgegebene Anfangsbedingungen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$.*

(1) Man bestimme die Lösung in den Unbestimmten m, k, $x(0)$, und $\dot{x}(0)$.
(2) Man bestimme die Lösung für $m = 5\,kg$, $k = 10N/m$, $x(0) = 0$, und $\dot{x}(0) = 1m/s$.
(3) Man skizziere das Schaubild für die ersten 10 Sekunden.

AUFGABE 1.12. *Gegeben sei die Boje von Beispiel 1.4. Wie groß ist die Periode in Salzwasser mit der Dichte* $1{,}2\,\mathrm{kg/dm^3}$ *?*[5]

3. Gedämpfte freie Schwingung

Die Differentialgleichung der gedämpften freien Schwingung ist

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0\ ,$$

das ist Gleichung (1.1) mit rechter Seite $F = 0$. Ihre charakteristische Gleichung ist die quadratische Gleichung (1.5),

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_k^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

[5]Diese Aufgabe hat jemand formuliert, der mit der typischen Dichte von Meerwasser nicht vertraut ist. Hier wäre die spannendere Frage: “wo schwimmt die Boje?”

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_k^2}.$$

Der Term $\delta^2 - \omega_k^2$ unter der Wurzel kann positiv, negativ oder null sein; für die Unterscheidung der Fälle ist es übersichtlicher, ω_k^2 herauszuheben und mit dem Dämpfungsgrad

$$D = \frac{\delta}{\omega_k}$$

in einer der beiden Formen

$$\delta^2 - \omega_k^2 = \begin{cases} -\omega_k^2\,(1 - D^2) \\ \omega_k^2\,(D^2 - 1) \end{cases}$$

zu schreiben. Je nachdem, ob $0 \le D < 1$, $D = 1$ oder $D > 1$, lautet die Lösung der quadratischen Gleichung also

$$\lambda = \begin{cases} -\delta \pm i\omega_k\sqrt{1 - D^2} \\ -\delta \\ -\delta \pm \omega_k\sqrt{D^2 - 1} \end{cases} \tag{1.14}$$

Dem entsprechend ergeben sich drei unterschiedliche Lösungstypen.

3.1. Unterkritische Dämpfung $0 < D < 1$. Setzen wir

$$\omega_D = \omega_k\sqrt{1 - D^2},$$

dann erhalten wir

$$\lambda = -\delta \pm i\ \omega_D.$$

Man nennt ω_D die Kreisfrequenz der GEDÄMPFTEN FREIEN SCHWINGUNG.
Die Funktionen

$$t \mapsto e^{-\delta t + i\omega_D t} \quad \text{und} \quad t \mapsto e^{-\delta t - i\omega_D t}$$

bilden eine Basis des Lösungsraumes (ein Fundamentalsystem). Die allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = a_1 e^{-\delta t + i\omega_D t} + a_2 e^{-\delta t - i\omega_D t},$$

wobei a_1 und a_2 von den Anfangsbedingungen abhängige Konstante sind. Durch Umformung erhalten wir zunächst

$$x(t) = e^{-\delta t}(a_1 e^{i\omega_D t} + a_2 e^{-i\omega_D t}),$$

und daraus, analog zur Herleitung von (1.9) aus (1.7)

$$x(t) = e^{-\delta t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t). \tag{1.15}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ist

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(\frac{\dot{x}(0) + \delta x(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t + x(0)\cos\ \omega_D t\right).$$

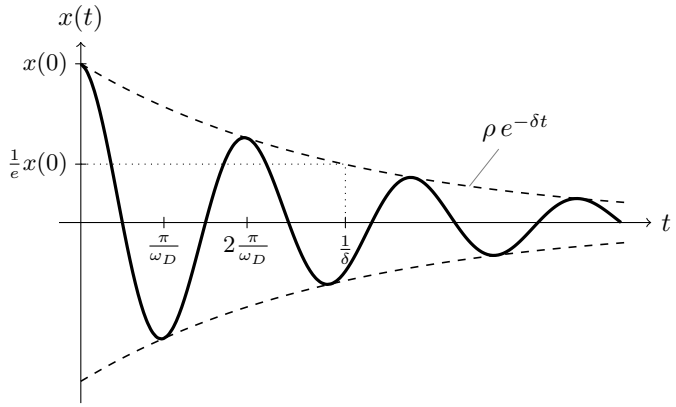


ABBILDUNG 1.5. Gedämpfte freie Schwingung. Die beiden Hüllkurven verdeutlichen das exponentielle Abklingen. Zur Zeit $t = \frac{1}{\delta}$ ist die Schwingung um den Faktor $\frac{1}{e} \approx 0{,}368$ abgeklungen.

Auch hier können wir die Lösung analog zu 1.12 in der Form

$$x(t) = \rho e^{-\delta t} \cos(\omega_D t - \varphi) \tag{1.16}$$

schreiben, wobei

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}(0) + \delta x(0)}{\omega_D}\right)^2 + x(0)^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{\dot{x}(0) + \delta x(0)}{\omega_D\, x(0)}.$$

Offensichtlich gilt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Das bedeutet, dass der homogene Anteil der Lösung asymptotisch verschwindet. Für uns ist also hauptsächlich die particuläre Lösung von Interesse.

Der Verlauf einer GEDÄMPFTEN FREIEN SCHWINGUNG ist in Abbildung 1.5 dargestellt. Wir fassen zusammen:

Zusammenfassung 1.3

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

bei unterkritischer Dämpfung $0 < D < 1$ ist die gedämpfte freie Schwingung

$$x(t) = \rho\, e^{-\delta t} \cos(\omega_D t - \varphi).$$

Die Größen δ, D, und $\omega_D = \omega_k\sqrt{1 - D^2}$ hängen nur von m, b, und k ab; ρ und φ von den Anfangsbedingungen. Mit $t \to \infty$ strebt $x(t) \to 0$.

Wir betrachten nun die lokalen Maxima von $x(t)$. Dazu setzen wir

$$\dot{x}(t) = -\delta\rho e^{-\delta t}\cos(\omega_D t - \varphi) - \omega_D \rho e^{-\delta t}\sin(\omega_D t - \varphi) = 0.$$

Durch elementare Umformungen ergibt sich daraus

$$\delta\cos(\omega_D t - \varphi) + \omega_D \sin(\omega_D t - \varphi) = 0,$$

$$\cos(\omega_D t - \varphi - \psi) = 0,$$

wobei $\tan\psi = \omega_D/\delta$. Setzen wir nun o.B.d.A $\dot{x}(0) = 0$ fest, so wird $\tan\varphi = \delta/\omega_D = D\omega_k/\omega_D$ und damit $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$. Wegen

$$\sin\omega_D t = \cos\left(\omega_D t - \frac{\pi}{2}\right)$$

treten die Maxima an den Stellen $\frac{2\pi}{\omega_D}n$ auf. Setzen wir nun $x_n = x\left(\frac{2\pi}{\omega_D}n\right)$, so ist

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{2\pi D\frac{\omega_k}{\omega_D}}.$$

Dieses Verhältnis ist also konstant. Man nennt

$$d = \log\frac{x_n}{x_{n+1}} = 2\pi D\frac{\omega_k}{\omega_D} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

das LOGARITHMISCHE DEKREMENT. Für kleine D ist

$$d \approx 2\pi D.$$

Zusammenfassung 1.4

Das Verhältnis aufeinanderfolgender Maxima der freien gedämpften Schwingung

$$x(t) = \rho\, e^{-\delta t}\cos(\omega_D t - \varphi)$$

ist konstant. Der Logarithmus[a] dieses Verhältnisses wird als logarithmisches Dekrement bezeichnet und hat den Wert

$$d = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}.$$

[a] natürlich der natürliche!

Für eine Messung kann es günstiger sein, nicht das Verhältnis unmittelbar aufeinanderfolgender Maxima zu bestimmen, sondern erst nach $k > 1$ Perioden zu vergleichen. Es besteht der einfache Zusammenhang

$$d = \frac{1}{k}\log\frac{x_n}{x_{n+k}}$$

AUFGABE 1.13. *Gegeben sei ein Prellbock mit der Federkonstanten* $k = 2\cdot 10^5\,\mathrm{N/m}$ *und der Dämpfungskonstanten* $b = 1{,}7{\cdot}10^5\,\mathrm{Ns/m}$. *Berechen Sie die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad für einen leeren Eisenbahnwaggon (Eigengewicht* $4500\,\mathrm{kg}$*).*

AUFGABE 1.14. *Beobachtet man gedämpfte freie Schwingungen experimentell, ist es beliebt, die Anzahl der Zyklen zu zählen, die notwendig sind bis sich die Amplitude auf 50 Prozent reduziert hat. Man leite mit Hilfe der Formel für das logarithmische Dekrement folgende Näherungsformel zur Berechnung dieser Zyklenzahl her:*

$$n = \frac{1}{2\pi D} \log 2.$$

Faustregel: Zusammenhang Dämpfungsgrad $D \leftrightarrow$ Anzahl $n_{1/2}$ der Zyklen bis zur halben Amplitude

$$n_{1/2} \approx 0{,}11 \frac{1}{D} \qquad D \approx 0{,}11 \frac{1}{n_{1/2}}$$

AUFGABE 1.15. *Bei kleiner Dämpfung kann man das logarithmische Dekrement d durch die Gesamtenergie U des Systems und die Energie ΔU, die pro Zyklus durch Dissipation verloren geht ausdrücken. Man leite folgende Näherungsformel her:*

$$d = \frac{\Delta U}{2U}.$$

Hinweis: Die in der Feder gespeicherte Energie bei der Auslenkung x ist $kx^2/2$.

3.2. Kritische Dämpfung $D = 1$. Bei $D = 1$ gilt $\delta = \omega_k$, also ist $\lambda = -\delta$ eine Doppelwurzel, vergleiche (1.14). Eulers Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ liefert nur eine Basislösung. Aber bei einer doppelten Wurzel, und nur genau in diesem Fall, ist $x(t) = te^{\lambda t}$ eine weitere unabhängige Lösung. (Aufgabe 1.17 verlangt, das nachzurechnen.)
Die Funktionen

$$t \mapsto e^{-\delta t} \quad \text{und} \quad t \mapsto te^{-\delta t}$$

bilden also eine Basis des Lösungsraums.
Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t} \tag{1.17}$$

oder, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen,

$$x(t) = [x(0)(1 + \delta t) + \dot{x}(0)t]e^{-\delta t}.$$

Da $e^{-\delta t}$ überall positiv ist, hat $x(t)$ höchstens eine Nullstelle (außer $x(t) \equiv 0$). Es gibt also keine Oszillation, man sagt, das System ist NICHT SCHWINGFÄHIG. Außerdem ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A + Bt}{e^{\delta t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{B}{\delta e^{\delta t}} = 0,$$

also strebt $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$.
Der Verlauf einer gedämpften Schwingung bei kritischer Dämpfung im Vergleich zu anderen Dämpfungsgraden ist aus Abb. 1.6 ersichtlich.

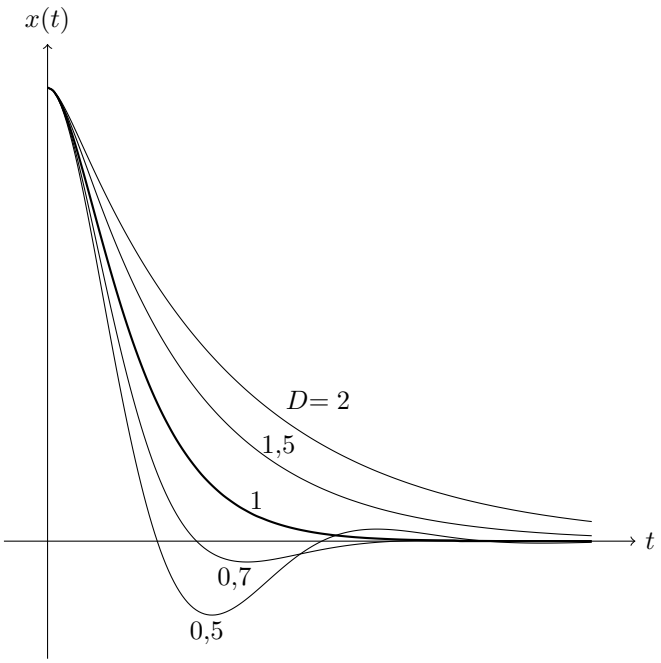


ABBILDUNG 1.6. Unter-, über- und kritisch gedämpfte Schwingungen. Bei kritischer Dämpfung $D = 1$ klingt die Auslenkung für $t \to \infty$ am schnellsten ab. Die Zeichengenauigkeit reicht allerdings nicht aus, um den Unterschied zwischen $D = 0{,}7$ und $D = 1$ zu erkennen.

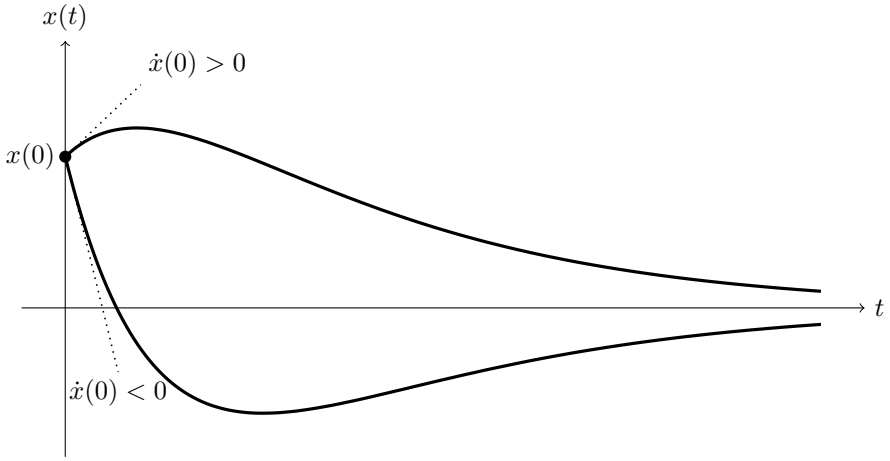


ABBILDUNG 1.7. Überkritische Dämpfung: Typischer Verlauf für zwei verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten. Höchstens ein Extremum und höchstens ein Nulldurchgang können auftreten

Zusammenfassung 1.5

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

bei kritischer Dämpfung $D = 1$ ist

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}.$$

Dabei hängt δ nur von m und b ab, A und B von den Anfangsbedingungen. Mit $t \to \infty$ strebt $x(t) \to 0$.
Im Vergleich zu unter- und überkritischer Dämpfung klingt bei kritischer Dämpfung $x(t)$ am raschesten ab.

3.3. Überkritische Dämpfung $D > 1$. In diesem Fall ist

$$\lambda = -\delta \pm \omega_k \sqrt{D^2 - 1}.$$

Setzen wir $\omega^* = \omega_k \sqrt{D^2 - 1}$, so erhalten wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\delta t}\ (a_1 e^{\omega^* t} + a_2 e^{-\omega^* t}),$$

die man unter Verwendung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \sinh(\omega^* t) &= \frac{e^{\omega^* t} - e^{-\omega^* t}}{2}, \\ \cosh(\omega^* t) &= \frac{e^{\omega^* t} + e^{-\omega^* t}}{2}, \end{aligned}$$

auch in der Form

$$x(t) = e^{-\delta t}\big(A \sinh(\omega^* t) + B \cosh(\omega^* t)\big)$$

schreiben kann. Auch in diesem Fall hat $x(t)$ höchstens eine Nullstelle, wenn $x(t) \not\equiv 0$. Auch dieses System oszilliert nicht und wird als nicht schwingfähig bezeichnet.
Wegen

$$-\delta + \omega^* = -\delta + \omega_k \sqrt{D^2 - 1} = \omega_k\ (\sqrt{D^2 - 1} - D) < 0$$

und

$$-\delta - \omega^* < 0$$

ist offensichtlich, wie im Falle unterkritischer und kritischer Dämpfung

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Wir fassen zusammen:

Zusammenfassung 1.6

Die allgemeine Lösung $x(t)$ der homogenen Gleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

bei überkritischer Dämpfung $D > 1$ ist

$$x(t) = e^{-\delta t}(A \sinh \omega^* t + B \cosh \omega^* t).$$

Dabei hängen δ und

$$\omega^* = \omega_k \sqrt{D^2 - 1}$$

nur von m, b und k ab, und A und B von den Anfangsbedingungen. Mit $t \to \infty$ strebt $x(t)$ gegen Null.

Beispiel 1.5. Gegeben sei die Gleichung

$$10\ddot{x} + 200\dot{x} + 810x = 0,$$

Einheiten im SI-System. Ist das System schwingfähig?

Beispiel 1.6. Ein 100 kg-Block ist mit einer Feder der Federsteifigkeit $1{,}5 \cdot 10^6$ N/m verbunden sowie mit einem parallel dazu geschalteten viskosen Dämpfer mit der Dämpfungskonstanten 4900 Ns/m. Der Block habe bei Auslenkung Null die Anfangsgeschwindigkeit von 5 m/s. Wie groß ist seine maximale Auslenkung x_{max}?

Beispiel 1.7. Ein Eisenbahnwaggon mit den Spezifikationen von Beispiel 1 fährt auf den Prellbock mit 20 m/s auf. Wie groß ist die maximale Auslenkung des Vorstoßes?

Aufgabe 1.16. *Ein Fahrzeug mit 500 kg Eigengewicht ist auf vier Federn montiert, deren statische Auslenkung* 1,5 mm *betrage. Wie groß muss die Dämpfungskonstante b eines geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsgliedes sein, das zusätzlich montiert wird (parallel zu den Federn), damit der Dämpfungsgrad* $D = 1$*?*

Aufgabe 1.17. *Es sei* $\lambda = -\delta$ *eine Doppelwurzel der quadratischen Gleichung (1.5). Zeigen Sie, dass die Funktionen*

$$e^{-\delta t},\ te^{-\delta t}$$

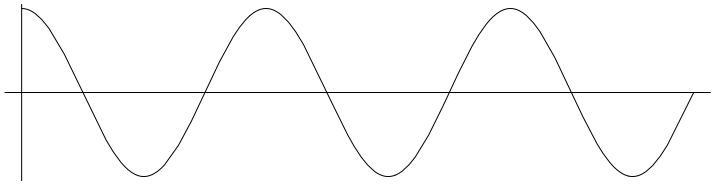
eine Basis des Lösungsraums (ein Fundamentalsystem) bilden. (Sie müssen erstens zeigen, dass es Lösungen sind und zweitens, dass es linear unabhängige Funktionen sind.)

4. Galerie zur Schwingungslehre

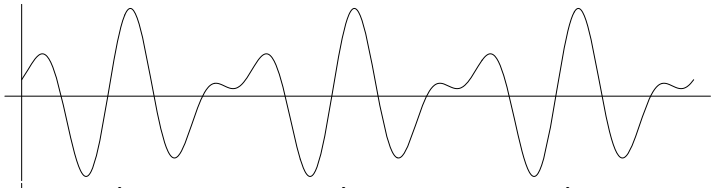
Zusammenfassung und Veranschaulichung typischer Schwingungsformen

4.1. Periodische Schwingungen.

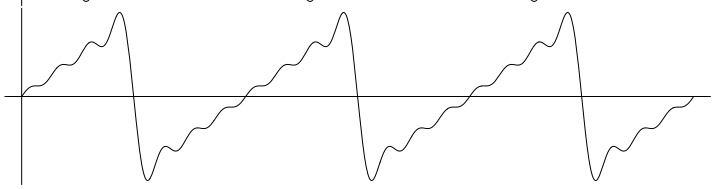
Harmonische Schwingung



Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Amplitude, Phase und Frequenz
Nur bei rationalem Frequenzverhältnis periodisch.



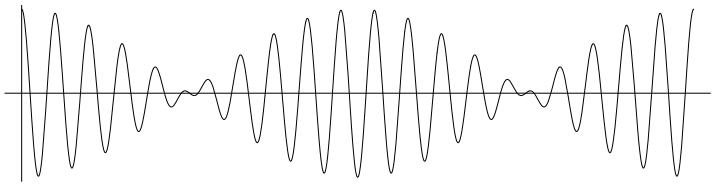
Partialsumme einer Fourierreihe



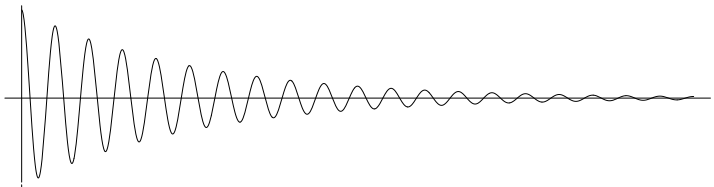
4.2. Aperiodische Schwingungen.

Sinusverwandte Schwingungen.

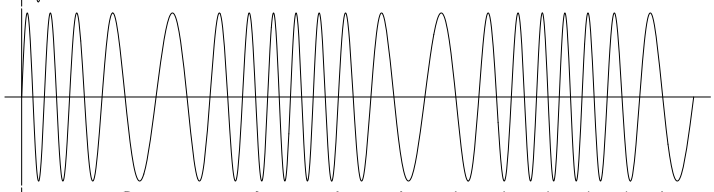
Schwebung
Spezialfall einer amplitudenmodulierten Schwingung, bei rationalen Frequenzverhältnissen auch eine periodische Schwingung.



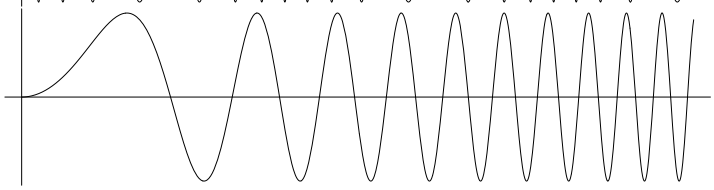
Abklingende Schwingung



Frequenzmodulierte Schwingung

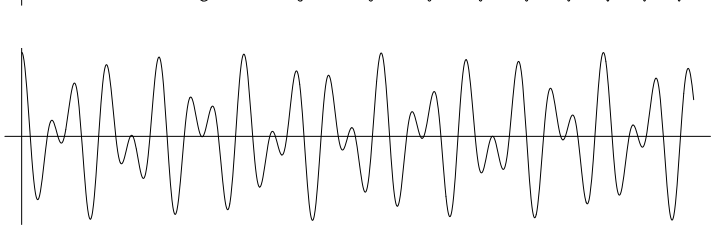


Monoton frequenzveränderliche Schwingung
typisches Beispiel: Anlauf eines Rotors



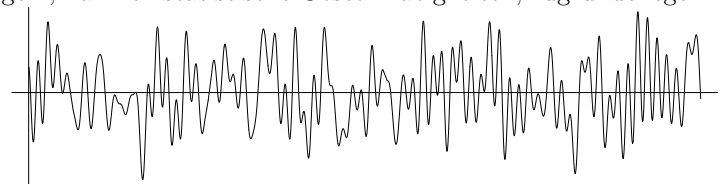
Irrationales Frequenzverhältnis.

Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit irrationalem Frequenzverhältnis
sieht fast periodisch aus, ist 's aber nicht.

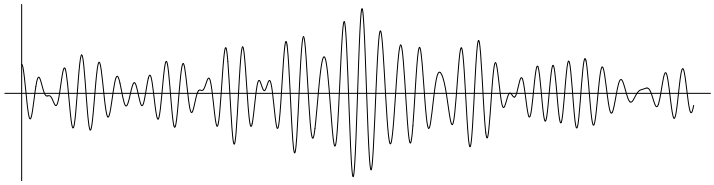


Stochastische Schwingungen. Genauer: Schwingungen, denen ein stochastischer Prozess zugrundeliegt. Englischer Term: *random vibrations*, könnte man mit zufälligen (genauer: zufallsbeeinflussten) Schwingungen übersetzen. Manche Autoren sprechen von regellosen Schwingungen, aber das ist ein inkonsequenter Term, weil eben doch Regeln, nämlich statistische Gesetzmäßigkeiten, zugrundeliegen.

Breitband-Prozess
Schwingungen aus einem breiten Frequenzbereich überlagern sich. Im Extremfall: Weißes Rauschen

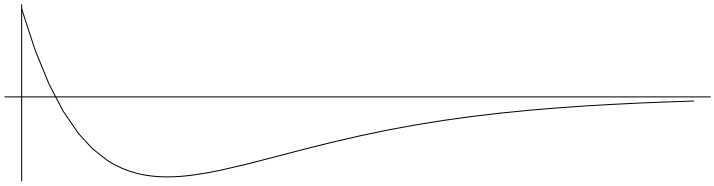


Engband-Prozess
hauptsächlich Schwingungen aus einem engen Frequenzbereich überlagern sich.

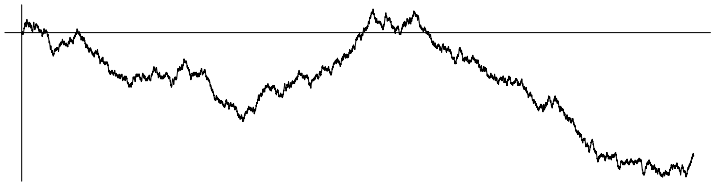


4.2.1. *Schwingungsähnliche Vorgänge.* Weisen gewisse Charakteristika von Schwingungen auf, (eine Größe wechselt mindestens einmal zwischen Steigen und Fallen), sind aber keine Schwingungen im eigentlichen Sinn.

Kriechender Grenzfall
Sogenannter aperiodischer Grenzfall: Lösung der Schwingungsgleichung bei $D = 1$.



Wiener-Prozess
Mathematisches Modell der Brownschen Molekularbewegung



5. Testfragen

(1) Wenn in einem ungedämpften Feder-Masse-System die Masse um 10% erhöht wird, schwingt das System etwa

a. 10% schneller c. 5% schneller e. gleich schnell

b. 10% langsamer d. 5% langsamer

(2) Man spricht von einem homogenen linearen System, wenn... (eine oder mehrere Antworten möglich)

a... die Bewegung nur entlang einer geraden Linie erfolgt;

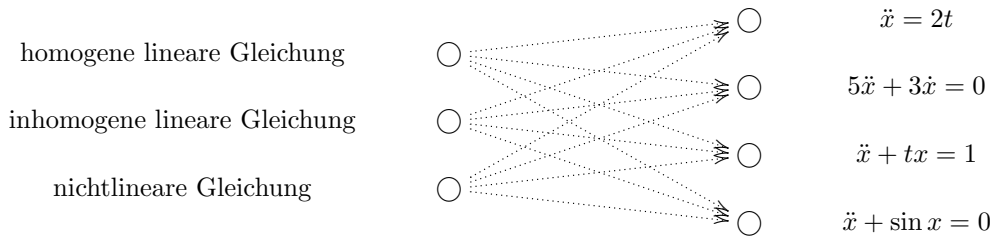
b... es einer linearen Differentialgleichung gehorcht;

c... es periodische Schwingungen ausführt;

d... die Summe $x_1(t) + x_2(t)$ und das Produkt $x_1(t) \cdot x_2(t)$ zweier Lösungen ebenfalls Lösungen sind;

e... mit $x_1(t), x_2(t)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $x_1(t) + \lambda x_2(t)$ eine Lösung ist.

(3) Ordnen Sie den Differentialgleichungen für $x = x(t)$ die Beschreibungen zu (verbinden Sie entsprechende Punkte durch Pfeile)!



(4) Gegeben sind eine Differentialgleichung und Anfangsbedingungen,

$$\ddot{x} + 9x = 0, \quad x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = 12 \quad .$$

Geben Sie die Lösung $x(t)$ an

a... als Summe von Sinus- und Cosinustermen;

b... als phasenverschobene Cosinusfunktion;

c... als Linearkombination von Exponentialfunktionen.

(5) Für ein Feder-Masse-Dämpfer-System $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ lauten die Parameter

$$m = 0{,}05\,\mathrm{kg}, \qquad b = 0{,}01\,\mathrm{Ns/m}, \qquad k = 0{,}2\,\mathrm{N/m} \qquad .$$

a. Berechnen Sie die Werte von δ, ω_k und D.

b. Wie lange dauert es größenordnungsmäßig (... 100 s, 10 s, 1 s, 0,1 s ...), bis die Schwingungsamplitude um eine e-Potenz abgenommen hat?

c. Wie lange dauert größenordnungsmäßig eine Schwingung?

(6) Geben Sie eine partikuläre Lösung der Gleichung $1\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 126$ an.

Geben Sie für diese Gleichung auch die Werte für $\omega_k,\ \delta,\ D$ an.

KAPITEL 2

Harmonische Erregerkräfte

Das Thema dieses Kapitels sind erzwungene Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad bei harmonischer Erregerfunktion F. „Harmonisch“ bedeutet: F ist eine (im allgemeinen auch phasenverschobene) Sinus-, Cosinus- oder komplexe Exponential-Funktion der Zeit t, also beispielsweise

$$F(t) = \rho \sin(\omega t)$$
$$F(t) = \rho \cos(\omega t + \psi)$$
$$F(t) = \rho \exp(i\omega t)$$

Es gilt Gleichung (1.1) hier in der Form

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \qquad \text{mit harmonischem } F\ . \tag{2.1}$$

Die allgemeine Lösung $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ dieser Gleichung ist die Summe einer allgemeinen Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \tag{2.2}$$

und einer partikulären Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung (2.1). Die Lösungen der homogenen Gleichung haben wir im vorigen Kapitel ausführlich behandelt. In diesem Abschnitt wollen wir uns nun auf die Suche einer partikulären Lösung x_p konzentrieren.
Die allgemeine Lösung lässt sich, falls zwei unterschiedliche partikuläre Lösungen x_{p1} und x_{p2} bekannt sind, schreiben als

$$x = x_{h1} + x_{p1} = x_{h2} + x_{p2}$$

mit entsprechend unterschiedlichen homogenen Lösungen x_{h1} und x_{h2}. Aber bei vorhandener Dämpfung streben beide homogenen Lösungen nach null. Daher unterscheiden sich die beiden partikuläre Lösungen beliebig wenig, wenn t nur groß genug ist. Somit konvergieren alle anfangs unterschiedlichen Lösungen mit wachsendem t zu *einer* partikulären Lösung, der Dauerlösung. Im Allgemeinen ist es genau diese (von allen abklingenden Termen freie) Dauerlösung, an der wir interessiert sind.

Die Lösungen der homogenen Gleichung beschreiben von den Anfangsbedingungen abhängige Einschwingvorgänge. Nach deren Abklingen stellt sich die Dauerlösung ein.

1. Ungedämpfte erzwungene Schwingungen

Für $b = 0$ und $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ haben wir die Gleichung

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \tag{2.3}$$

zu lösen. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist von der Form

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

wobei, wie wir schon gezeigt haben,

$$x_h(t) = A \sin(\omega_k t) + B \cos(\omega_k t)$$

ist. Um eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ zu finden, versuchen wir den Ansatz

$$x_p(t) = q \sin(\omega t)$$

und bestimmen die unbekannter Amplitude q. Es genügt nur sin-Terme zu betrachten, weil in der Gleichung (2.3) nur die Funktion und deren zweite Ableitung vorkommt. Nachdem die zweite Ableitung von $q \sin$ wieder ein Vielfaches von sin ist, kann kein cos-Term vorkommen und es genügt dieser Ansatz. Einsetzen in (2.3) liefert

$$-mq\omega^2 \sin(\omega t) + kq \sin(\omega t) = F_0 \sin(\omega t) \ .$$

Nun $\sin(\omega t)$ kürzen[1], q herausheben,

$$q(-m\omega^2 + k) = F_0,$$

woraus, falls $k \neq m\omega^2$, folgt

$$q = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \ .$$

Aber es ist besser, q noch nicht explizit auszudrücken, sondern zuerst durch k zu dividieren,

$$q\left(-\frac{m}{k}\omega^2 + 1\right) = \frac{F_0}{k} \ .$$

Wir verwenden $\frac{k}{m} = \omega_k^2$, die kritische Frequenz, und erhalten

$$q\left(-\frac{\omega^2}{\omega_k^2} + 1\right) = \frac{F_0}{k}. \tag{2.4}$$

Die maßgebliche dimensionslose Größe bei erzwungenen Schwingungen ist das Verhältnis von Erregerfrequenz ω zu kritischer Frequenz ω_k.

FREQUENZVERHÄLTNIS $\eta = \dfrac{\omega}{\omega_k}$

Damit vereinfacht sich Gleichung (2.4) zu

$$q(1 - \eta^2) = \frac{F_0}{k} \ .$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem ob $\eta \neq 1$ oder $\eta = 1$ ist.

[1]Die Gleichung muss für alle Werte von t gelten, insbesondere für solche, wo $\sin(\omega t) \neq 0$. Dann darf man kürzen.

Unkritische Erregung mit $\eta \neq 1$. In diesem Fall spricht man von unter- oder überkritischer Erregung, je nachdem, ob $\eta < 1$ oder $\eta > 1$ gilt. Dann dürfen wir durch $(1-\eta^2)$ dividieren. Die Amplitude q ergibt sich zu

$$q = \frac{F_0}{k} \, \frac{1}{1-\eta^2} \, .$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\sin(\omega_k t) + B\cos(\omega_k t) + \frac{F_0}{k} \, \frac{1}{1-\eta^2} \sin(\omega t).$$

Wir bemerken dazu:

- Es treten zwei Frequenzen in der Lösung auf: die kritische Frequenz ω_k und die Erregerfrequenz ω. Man spricht in diesem Zusammenhang von EIGENFREQUENZ und AUFGEPRÄGTER FREQUENZ.
- Nur $A\sin(\omega_k t)+B\cos(\omega_k t)$, die Lösung der homogenen Gleichung, (freie, ungedämpfte Schwingung mit der Eigenfrequenz des Systems) hängt von den Anfangsbedingungen ab.
- Ungedämpfte Schwingungen sind eine Idealisierung. Reale Systeme sind immer gedämpft. Auch wenn diese Dämpfung noch so klein ist, irgendwann klingen freie Schwingungen ab. Langfristig betrachtet, im Limes $t \to \infty$, bleibt nur der von der Störfunktion herrührende Term in der Lösung der inhomogenen Gleichung bestehen. Man spricht in diesem Zusammenhang von der DAUERLÖSUNG

  $$x(t) = \frac{F_0}{k} \, \frac{1}{1-\eta^2} \sin(\omega t)$$

  des Systems. Sie schwingt mit der aufgeprägten Frequenz und hängt nicht von den Anfangsbedingungen ab.
- Es ist F_0/k die Auslenkung, die bei rein *statischer* Wirkung von F_0 auf das System auftreten würde. Man nennt F_0/k die STATISCHE AUSLENKUNG.
- Der dimensionslose Faktor $1/(1-\eta^2)$ kann als Amplitudenverhältnis gedeutet werden. Im Verhältnis zur statischen Auslenkung vergrößert sich die Amplitude im dynamischen Fall um diesen Faktor. Man nennt den Betrag dieses Verhältnisses

  $$V = \frac{1}{|1-\eta^2|}$$

  die VERGRÖSSERUNGSFUNKTION.
- Bei unterkritischer Erregung hat $1/(1-\eta^2)$ positives Vorzeichen. Das bedeutet, Erregerkraft und Auslenkung schwingen mit *gleicher Phase*. Bei überkritischer Erregung wechselt das Vorzeichen, Erregerkraft und Auslenkung schwingen *gegenphasig*.

Kritische Erregung mit $\eta = 1$. Im Fall $\eta = 1$, d.h. für $\omega = \omega_k$, führt der Ansatz von vorhin zu keiner Lösung. Hier setzen wir

$$x_p(t) = qt\cos(\omega t).$$

Im Prinzip fehlt hier der sin-Term. Wenn wir ihn aber hinzunehmen, werden wir erkennen, dass er sich wegkürzt und somit dieser Ansatz bereits genügt.

Dann sind

$$\dot{x}_p(t) = q\cos(\omega t) - qt\omega\sin(\omega t)$$
$$\ddot{x}_p(t) = -2q\omega\sin(\omega t) - qt\omega^2\cos(\omega t)\ .$$

In (2.3) eingesetzt ergibt das

$$-2q\omega\sin(\omega t) - qt\omega^2\cos(\omega t) + qt\omega^2\cos(\omega t) = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t),$$

also

$$q = -\frac{F_0}{m}\ \frac{1}{2\omega} = -\frac{F_0}{k}\ \frac{k}{m}\ \frac{1}{2\omega} = -\frac{F_0}{k}\ \frac{\omega_k^2}{2\omega} = -\frac{F_0}{k}\ \frac{\omega_k}{2}.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$x(t) = A\sin(\omega_k t) + B\cos(\omega_k t) - \frac{F_0}{k}\ \frac{\omega_k}{2}t\cos(\omega_k t)\ .$$

Die Amplitude der partikulären Lösung *wächst mit der Zeit t linear an.* Man spricht von der Resonanzkatastrophe, siehe Abbildung 2.1.

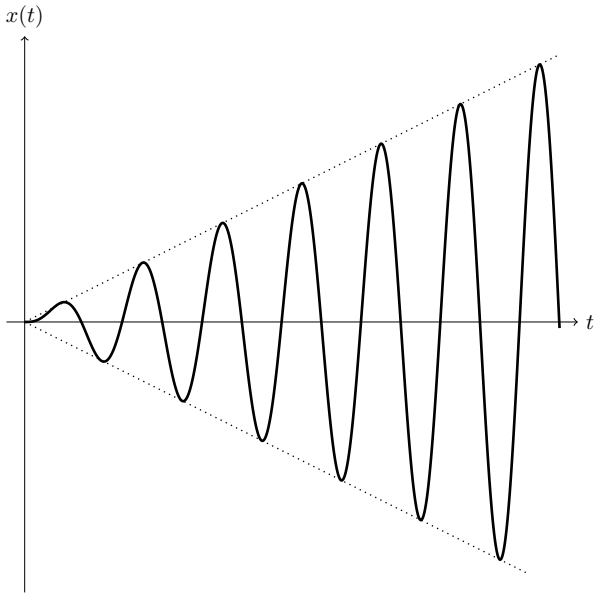


Abbildung 2.1. Resonanzkatastrophe. Die Hüllkurven verdeutlichen: Die Amplitude wächst linear mit der Zeit.

2. Gedämpfte erzwungene Schwingung

Wir verwenden statt $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ den komplexen Kraftterm $F(t) = F_0 e^{i\omega t} = F_0\big(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big)$. Gehen wir mit dem Ansatz

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} H(\omega) e^{i\omega t} \tag{2.5}$$

in die Gleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\, e^{i\omega t}\ ,$$

so erhalten wir

$$H(\omega)\left(-\frac{m}{k}\omega^2 + \frac{ib}{k}\omega + 1\right) e^{i\omega t} = e^{i\omega t}.$$

Daher ist

$$H(\omega) = \frac{1}{-\frac{m}{k}\omega^2 + \frac{ib}{k}\omega + 1}, \tag{2.6}$$

wenn $-\frac{m}{k}\omega^2 + \frac{ib}{k}\omega + 1 \neq 0$. Führen wir wieder das Frequenzverhältnis $\eta = \frac{\omega}{\omega_k}$ ein, so können wir $H(\omega)$ auch als $H(\eta)$ in der Form

$$H(\eta) = \frac{1}{1 - \eta^2 + i2D\eta} \tag{2.7}$$

darstellen, wobei $H(\eta)$ genau dann nicht erklärt ist, wenn $(\eta, D) = (1, 0)$ ist, also im Fall der Resonanzkatastrophe. Da wir diesen Fall schon betrachtet haben, können wir $H(\eta)$ als wohldefiniert voraussetzen.
Die Funktionen $H(\omega)$ beziehungsweise $H(\eta)$ beschreiben den Zusammenhang zwischen Erregerkraft $F(t)$ und Auslenkung $x(t)$ bei Frequenz ω. Einfach gesagt: eine Erregung mit Frequenz ω wirkt sich mit einem Faktor $H(\omega)$ auf das Ergebnis aus. Man nennt $H(\omega)$ (beziehungsweise $H(\eta)$ – sie beschreibt denselben funktionalen Zusammenhang, nur mit der Substitution $\eta = \omega/\omega_k$ einfacher geschrieben) daher die Frequenzübertragungsfunktion, oder auch nur ÜBERTRAGUNGSFUNKTION.
Für Betrag und Argument (Phasenwinkel) von $H(\eta)$ ergibt sich

$$V = |H| = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \tag{2.8}$$

$$\arg H = \arctan\frac{-2D\eta}{1-\eta^2} \tag{2.9}$$

Wir definierten den Phasenwinkel φ mit umgedrehten Vorzeichen,

$$\varphi = \arctan\frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

und drücken die komplexe Größe $H(\eta)$ durch Vergrößerungsfunktion V und Phasenwinkel aus.

$$H(\eta) = V e^{-i\varphi}\ .$$

Die partikuläre Lösung ist somit

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} V e^{-i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = \frac{F_0}{k} V e^{i(\omega t - \varphi)} \ .$$

Nützliche Beziehungen beim Umformen: Aus den Definitionen

$$D = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_k}$$

lassen sich b und ω ausdrücken:

$$b = 2Dm\omega_k = \frac{2Dk}{\omega_k} = 2D\sqrt{km}, \qquad \omega = \eta\omega_k = \eta\sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

Das vereinfacht die Umformung von (2.6) zu (2.7), oder von (2.10); auch in Abschnitt 5 helfen diese Formeln.

Geometrische Herleitung: Zeigerdiagramm der Kraftvektoren. Die Kraftterme in der Schwingungsgleichung als Zeiger in unterschiedlichen Farben dargestellt.

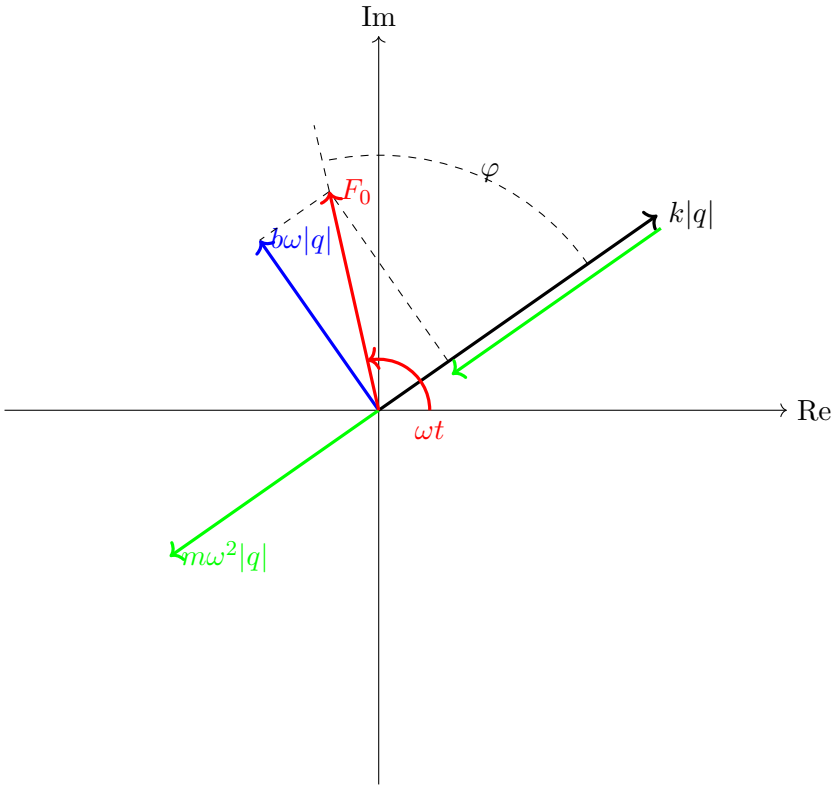
$$\boxed{m\ddot{x}} + \boxed{b\dot{x}} + \boxed{kx} = \boxed{F_0 \exp(i\omega t)}$$

Mit dem Ansatz (beachte: es sind hier $m, b, k, F_0, \omega \in \mathbb{R}$, aber $q \in \mathbb{C}$!)

$$\begin{aligned} x &= q \exp(i\omega t) \\ \dot{x} &= i\omega q \exp(i\omega t) \\ \ddot{x} &= -\omega^2 q \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

gilt:

Federkraft: Amplitude $k|q|$, in Richtung des x-Zeigers.
Dämpfungskraft: Amplitude $b\omega|q|$, um 90° dem x-Zeiger in Drehrichtung voraus.
Trägheitskraft: Amplitude $m\omega^2|q|$, dem x-Zeiger entgegengesetzt.
Erregerkraft: Resultierende dieser drei Kraft-Zeigervektoren. Weil F_0 reell ist, lässt sich an diesem Zeigervektor der Winkel ωt ablesen.



Im Zeigerdigramm läuft der $\boxed{x\text{-Zeiger}}$ dem $\boxed{F\text{-Zeiger}}$ um den Winkel φ nach; man liest ab:
(2.10)

$$\tan\varphi = \frac{b\omega}{k - m\omega^2}\ ,\ F_0 = |q|\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}\ ,\ \text{und daraus}\ |q| = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

Die dimensionsbehafteten Größen m, b, k und ω lassen sich durch D und η ausdrücken; dann entspricht das Ergebnis den Gleichungen (2.9) und (2.8):

$$\tan\varphi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2} \quad \text{und} \quad |q| = \frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}.$$

Vom komplexen Ansatz zur reellen Lösung. Dem Real- und dem Imaginärterm der Erregerkraft $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ entsprechen Real- und Imaginärterm der Lösung. Zu Erregerkräften

$$F(t) = F_0 \begin{cases} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{cases}$$

gehören also jeweils die Lösungen

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} V \begin{cases} \sin(\omega t - \varphi) \\ \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}.$$

Dabei ist F_0/k wieder die statische Auslenkung (die Auslenkung der Masse m bei statischer Wirkung der Kraft F_0) und V der von η abhängige Faktor („Vergrößerungsfunktion“), um den die Amplitude aufgrund der dynamisch wirkenden Erregerkraft vergrößert wird. Wie im ungedämpften Fall hat die partikuläre Lösung die Frequenz der Erregerkraft (AUFGEPRÄGTE FREQUENZ).

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \tag{2.11}$$

hat bei unterkritischer Dämpfung (Dämpfungdgrad $D < 1$) die Form

$$x(t) = e^{-\delta t}\big(A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)\big) + \rho\sin(\omega t - \varphi)$$

mit

$$\rho = \frac{F_0}{k}V, \quad V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}, \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}.$$

Die Koeffizienten A und B werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

$$A = \frac{\dot{x}(0) + x(0)\delta + \rho(\delta\sin\varphi - \omega\cos\varphi)}{\omega_D}, \qquad B = x(0) + \rho\sin\varphi$$

Die Abbildungen 2.2 und 2.3 zeigen den Verlauf von V und φ in Abhängigkeit von η für verschiedene D. Eine Darstellung der komplexwertigen Funktion $H(\eta)$ in Form von ORTSKURVEN finden Sie am Ende des Kapitels, Seite 47.

Verschwundene Dämpfung. Wir beachten weiters, dass für $\eta \neq 1$

$$\lim_{D\to 0} \rho\sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{k}\frac{1}{1-\eta^2}\sin(\omega t)$$

ist, also die partikuläre Lösung im gedämpften Fall für $D \to 0$ in die partikuläre Lösung im ungedämpften Fall übergeht.
Da der erste Term der allgemeinen Lösung

$$x(t) = e^{-D\omega_k t}\big(A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)\big) + \rho\sin(\omega t - \varphi)$$

von (2.1) mit $t \to \infty$ gegen Null geht, setzt man daher bei kleiner Dämpfung oft als Dauerlösung

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1-\eta^2} \sin(\omega t)$$

und spricht von VERSCHWUNDENER DÄMPFUNG.
Das Schaubild der Vergrößerungsfunktion (Abbildung 2.2) zeigt: Die Kurve für Dämpfungsgrad $D = 0{,}1$ verläuft schon sehr nahe an der Kurve für $D = 0$, nur in der Nähe von $\eta = 1$ gibt es erkennbare Unterschiede; ab $\eta > 1{,}5$ fallen die Kurven in der Zeichnung zusammen. Für $\eta \gg 1$ und $D \ll 1$ kann man also näherungsweise mit der ungedämpften Lösung rechnen.

2.1. Aufgaben.

AUFGABE 2.1. *Gegeben sei die Gleichung*

$$2\ddot{x} + 12\dot{x} + 50x = 8\sin(10t)$$

(Einheiten im SI-System). Man berechne:

- *die kritische Kreisfrequenz ω_k,*
- *die Kreisfrequenz ω_D,*
- *den Dämpfungsgrad D,*
- *die Amplitude ρ der stationären Lösung.*

Antwort $\omega_k = 5$ rad/s, $D = 0,6$ $\omega_D = 4$, $\eta = 2$, $\rho = 0,0416$.

AUFGABE 2.2. *Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung mit reellen Koeffizienten*[2] *Zeigen Sie: Ist $x(t)$ eine Lösung dieser Gleichung, dann sind sowohl Real- als auch Imaginärteil von $x(t)$ Lösungen für Real- beziehungsweise Imaginärteil der Störfunktion $F(t)$, also*

$$D(\operatorname{Re} x) = \operatorname{Re}(F(t)) \quad \textit{und} \quad D(\operatorname{Im} x) = \operatorname{Im}(F(t)).$$

Hinweis Es genügt zu zeigen, dass $\operatorname{Re} D(x) = D(\operatorname{Re} x)$ ist, und $\operatorname{Im} D(x) = D(\operatorname{Im} x)$. Lösen sie die Aufgabe zuerst für die Gleichung 2.1!

AUFGABE 2.3. *Der Energieverlust pro Zyklus ist die von der Dämpfungskraft geleistete Arbeit*

$$\oint b\dot{x}(t)dx.$$

Man berechne dieses Integral für die Dauerlösung der Gleichung 2.11.

Hinweis Es ist $dx/dt = \dot{x}(t)$, und daher $dx = \dot{x}(t)dt$.

3. Resonanz

Wenn die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz eines Systems ist, spricht man oft von RESONANZ. Bei einem ungedämpften System wächst die Lösung bei Resonanz unbegrenzt an, wie wir gesehen haben. Bei gedämpften Systemen wird die maximale Amplitude aber nicht für $\eta = 1$ erreicht, wie wir Abbildung 2.2 entnehmen.
Wir wollen nun das Maximum von

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

[2]Stellen Sie sich für $D(x(t))$ zuerst einmal den Term $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)$ vor (so wie in Gleichung 2.1), die überlegungen gelten aber allgemein für lineare Differentialausdrücke der Form $D(x(t)) = a_n(t)x^{(n)}(t) + \cdots + a_2(t)\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)$

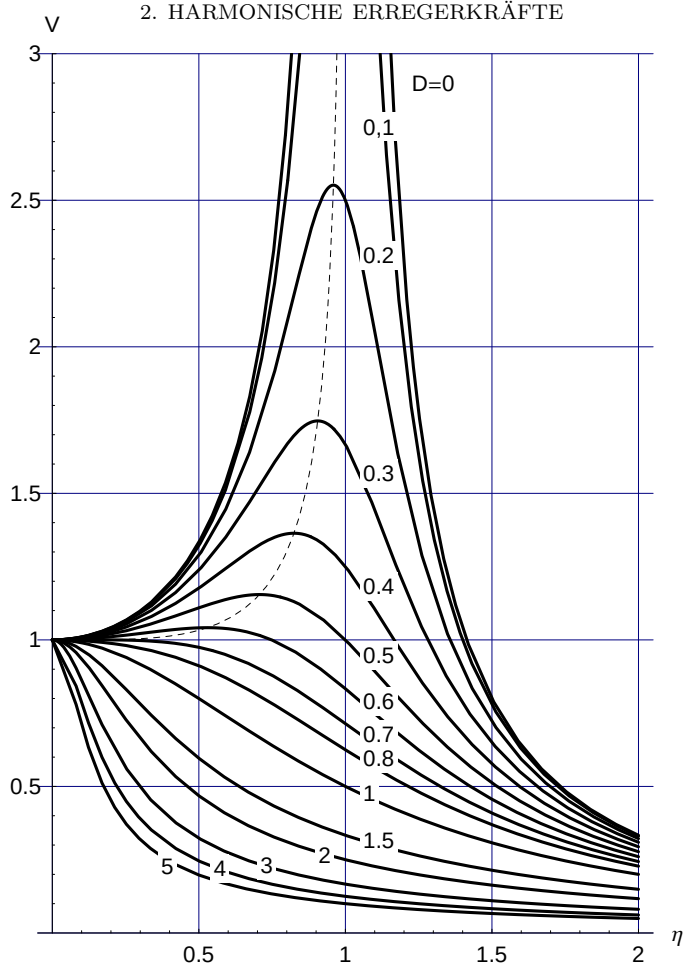


ABBILDUNG 2.2. Einfluß der Dämpfung auf die maximale Amplitude. Dargestellt ist die Vergrößerungsfunktion V (Gleichung 2.8) in Abhängigkeit von η und D.

bestimmen. Dazu genügt es, das Minimum von $1/V$ beziehungsweise $1/V^2$ zu ermitteln. Eine dazu notwendige Bedingung ist

$$\frac{d}{d\eta}[(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2] = 0,$$

also

$$-2\eta \cdot 2(1-\eta^2) + 2D \cdot 2(2D\eta) = 0$$

oder

$$\eta(2D^2 - 1 + \eta^2) = 0,$$

mit den Lösungen $\eta = 0$ und $\eta^2 = 1 - 2D^2$. Nun ist die zweite Ableitung

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2\} = 4(2D^2 - 1 + \eta^2 + 2\eta^2),$$

von $1/V^2$ für $\eta = 0$ nur dann positiv, wenn $D > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist. Damit hat V für $D > \frac{\sqrt{2}}{2}$ an der Stelle $\eta = 0$ ein Maximum. Da in diesem Fall die Gleichung $\eta^2 = 1 - 2D^2$ keine reelle Lösung hat, ist dies das einzige Maximum.

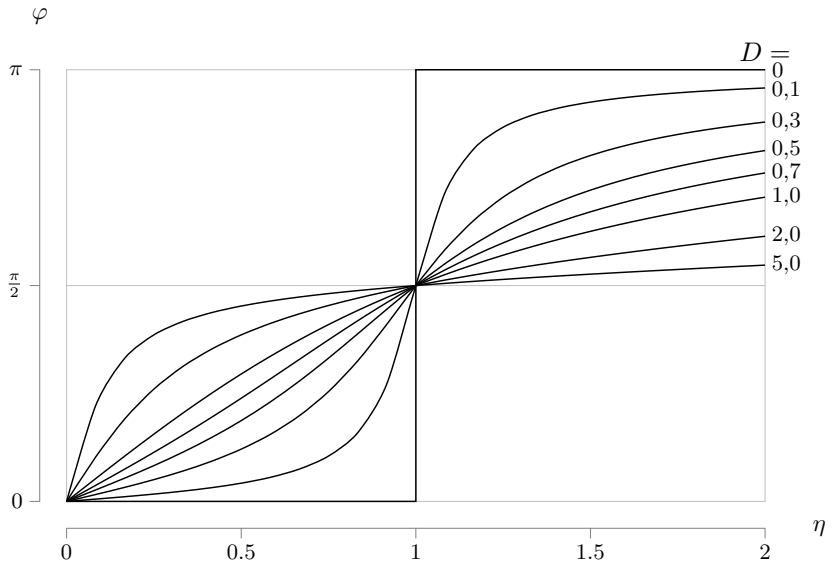


ABBILDUNG 2.3. Phasenverschiebung φ in Abhängigkeit von Frequenzverhältnis η für verschiedene Dämpfungsgrade D. Alle Kurven gehen durch den Punkt $(\eta = 1, \varphi = \pi/2)$. Das bedeutet: Für $\eta = 1$, also Erregerfrequenz ω gleich kritischer Frequenz ω_k, ist die Phasenverschiebung unabhängig vom Dämpfungsgrad genau $\pi/2$.

Ist $D < \frac{\sqrt{2}}{2}$, so hat $\eta^2 = 1 - 2D^2$ genau eine positive reelle Lösung und $\frac{d^2}{d\eta^2}(1/V^2)$ ist an dieser Stelle positiv. Auch in diesem Fall hat V genau ein Maximum, und zwar an der Stelle

(2.12) $$\eta_{\max} = \sqrt{1 - 2D^2} \ .$$

Für $D \ll 1$ gilt näherungsweise

$$\eta_{\max} \approx 1 - D^2 \ .$$

(Vergleichen Sie mit Abbildung 2.2: Die strichlierte Kurve zeigt, wie sich die Lage des Maximums verschiebt. Sie können in der Graphik nachmessen: die Verschiebung beträgt für $D = 0,2$ etwa $D^2 = 0,04$, und für $D = 0,3$ etwa $D^2 = 0,09$.)
Man beachte, dass

$$\lim_{D \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 - 2D^2} = 0,$$

und dass die Stelle $\eta = 0$ auch für $D = \frac{\sqrt{2}}{2}$ das einzige Maximum ist.
Viele Autoren sprechen daher von RESONANZ bei $\eta = \sqrt{1 - 2D^2}$, also $\omega = \omega_k \sqrt{1 - 2D^2}$. (Man vergleiche $\omega_D = \omega_k \sqrt{1 - D^2}$.)
Der Wert von V an der Stelle $\eta = \sqrt{1 - 2D^2}$ ist

$$V_{\max} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}.$$

Für $D \ll 1$ gilt in guter Näherung

$$V_{\max} \approx \frac{1}{2D}.$$

(Vergleichen Sie wieder mit Abbildung 2.2: für $D = 0{,}2$ sollte das Maximum laut Näherungsformel den Wert $V_{\max} = 2{,}5$ erreichen. Die Graphik zeigt: das Maximum liegt leicht darüber; die exakte Formel errechnet: $V_{\max} = 2{,}552$. Für $D = 0{,}1$ lässt sich in der Grafik kein Wert mehr ablesen. Die Näherung ergibt $V_{\max} = 5$, der exakte Wert ist $V_{\max} = 5{,}025$)

4. Resonanzschärfe

Es sei $D < \frac{\sqrt{2}}{2}$ und η_1, η_2 seien die Stellen, an denen $V(\eta_1) = V(\eta_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} V_{max}$, also die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4D} \frac{1}{\sqrt{1-D^2}}.$$

Quadrieren wir beide Seiten und gehen wir zu Reziprokwerten über, erhalten wir die Gleichung

$$\eta^4 - 2(1-2D^2)\eta^2 + 1 - 8D^2 + 8D^4 = 0$$

und damit

$$\eta_{1,2}^2 = 1 - 2D^2 \pm 2D\sqrt{1-D^2}.$$

Unter Vernachlässigung von D^2-Termen (also für kleine D, sprich $D \ll 1$) folgt

$$\eta_{1,2}^2 \approx 1 \pm 2D,$$

oder

$$\eta_{1,2} \approx 1 \pm D.$$

Wählen wir die Bezeichnung so, dass $\eta_1 < \eta_2$ ist, so gilt

$$D \approx \frac{\eta_2 - \eta_1}{2}$$

Wie wir schon erwähnt haben, sind viele Systeme, die in der Praxis auftreten, nur annähernd linear. In solchen Fällen möchte man gerne ein gutes lineares Ersatzsystem bilden. Dabei ist eine gute Näherung gerade im Resonanzbereich von besonderer Bedeutung ist. Haben wir es also mit keiner viskoelastischen Dämpfung zu tun und ist V als Funktion von η bekannt oder experimentell bestimmbar (Abb. 2.4), so sucht man die zwei Werte $\eta_1 < \eta_2$ mit $V(\eta_1) = V(\eta_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, V_{max}$ und setzt den Dämpfungsgrad D einer viskoelastischen Ersatzkraft durch

$$D = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2}$$

fest.

Andere Verfahren, um VISKOELASTISCHE ERSATZKRÄFTE festzulegen werden wir später kennenlernen.

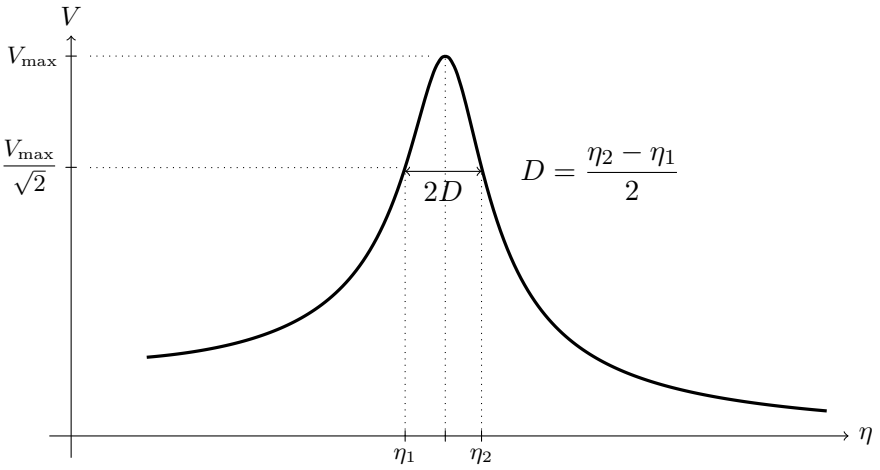
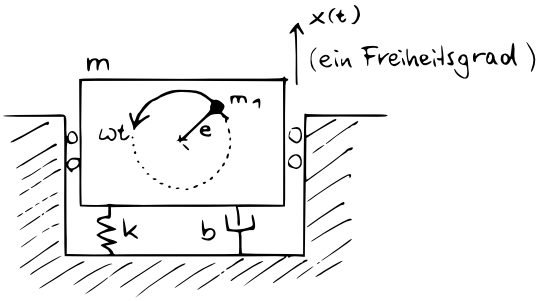


ABBILDUNG 2.4. Resonanzschärfe

5. Anwendungsbeispiele

Die folgenden Anwendungsbeispiele sind, wenn man sie richtig ansetzt, mit den Methoden dieses Kapitels lösbar. Der unwuchtige Motor auf einem Fundament ist natürlich ein Standardbeispiel - größere Motoren sind oft auf einem Fundament gelagert, eine kleine Unwucht läßt sich kaum vermeiden. Man wünscht, dass das Fundament möglichst wenig schwingt und die über Feder und Dämpfer in den Boden abgeleiteten Kräfte klein sind. Dabei kann Feder und Dämpfer auch eine Gummimatte sein oder der sogenannte gewachsene Boden.
Bei unserem Fahrzeugmodell geht die Erregerkraft, bedingt durch die Unebenheiten der Fahrbahn, vom Boden aus und wir sind an den Bewegungen und Beschleunigungen interessiert, die auf das Fahrzeug (ohne Fahrwerk) wirken, also etwa auf den Fahrer.

5.1. Unwuchtiger Motor auf Fundament. Ein wichtiges Beispiel für ein gedämpftes System mit harmonischer Erregerkraft ist der unwuchtige Motor auf einem Fundament. Die Gesamtmasse des unwuchtigen Motors sei m, die Unwucht habe die Masse m_1 im Abstand e von der Drehachse. Als einfaches Modell nehmen wir an, dass nur ein Freiheitsgrad möglich ist.



Die Bewegungsgleichung lautet dann[3]

[3]Ganz sauber lässt sich diese Gleichung mit dem Lagrange-Formalismus herleiten; es ist nicht völlig offensichtlich, ob m_1 nur rechts die Zentrifugalkraft ausgeübt, oder auch zur Trägheitskraft rechts voll mit beiträgt...

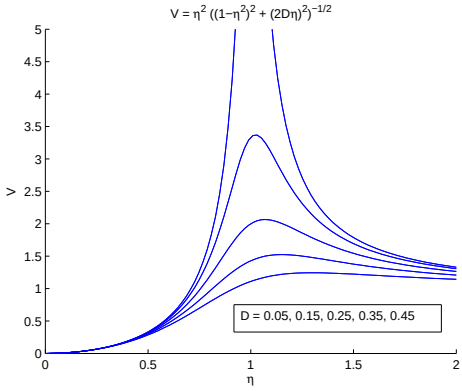


ABBILDUNG 2.5. Vergrößerungsfaktor für einen Motor mit Unwucht.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = m_1 e\omega^2 \sin(\omega t)\ . \tag{2.13}$$

Das entspricht der Gleichung 2.11 für $F_0 = m_1 e\omega^2$. Nach Division durch m und Einführung der dimensionslosen Größe $\mu = m_1/m$ hat sie Gestalt

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_k^2 x = \mu e\omega^2 \sin(\omega t)\ .$$

Für die Amplitude ρ und die Phasenverschiebung φ der Lösung

$$x(t) = \rho \sin(\omega t - \varphi)$$

erhalten wir dann wegen

$$\frac{F_0}{k} = \frac{m_1 e\omega^2}{k} = \frac{m_1}{m}\, e\omega^2\, \frac{m}{k} = \mu e\eta^2$$

die Darstellungen

$$\rho = \frac{\mu e\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

und

$$\varphi = \arctan \frac{2D\eta}{1-\eta^2}.$$

Wir beziehen bei der Berechnung des Vergrößerungsfaktors nun alles auf die nur vom System und nicht von der Frequenz der Erregerfunktion abhängige Größe μe und nicht auf $\mu e\eta^2$. Damit hat der Vergrößerungsfaktor die Form

$$V = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}. \tag{2.14}$$

Sein Verlauf ist in Abbildung 6 für verschiedene D dargestellt.

Zusammenfassung 2.1

Die Dauerlösung von (2.13) (Erregung durch rotierende Unwucht) lautet

$$x(t) = \mu e V \sin(\omega t - \varphi) \ .$$

Interpretation:

- Die Amplitude der Lösung ist in Verhältnis zur Exzentrizität μe um den Faktor V aus Gleichung 2.14 verstärkt.
- Für $\eta = 0$ oder $\eta \ll 1$ ist $V = 0$, beziehungsweise $V \ll 1$, das heißt, in Ruhe, oder bei Rotation weit unter der kritischen Kreisfrequenz, kommt es zu keiner, beziehungsweise nur geringer Auslenkung.
- Für $\eta \gg 1$, weit im überkritischen Bereich, strebt $V \to 1$, die Amplitude nähert sich dem Wert μe. Der Schwerpunkt des Gesamtsystems bleibt in Ruhe, Hauptmasse $m - m_1$ und exzentrische Masse m_1 rotieren gegenphasig um den gemeinsamen Schwerpunkt.
- Im kritischen Bereich $\eta \approx 1$ treten bei geringer Dämpfung große Amplituden auf. Beim Hoch- und Niederfahren eines Motors muss der kritische Bereich rasch durchlaufen werden. Im Resonanzfall wächst die Amplitude linear an; bei raschem Durchlaufen des kritischen Bereiches hat die Amplitude nicht genug Zeit, sich auf große Werte aufzuschaukeln.
- Bei großer Dämpfung zeigt V nur geringe überhöhung im kritischen Bereich. Allerdings wächst dann die übertragene Bodenkraft stark an (wird gleich anschließend erklärt). Der Sinn einer abgefederten Lagerung ist die Abschirmung der Unwuchtkräfte gegenüber der Einleitung ins Fundament. Das ist nur bei geringer Dämpfung möglich.

Die Schwingungen der Masse übertragen durch Feder und Dämpfungsglied Kräfte F_c beziehungsweise F_b auf den Boden. Die insgesamt übertragene Bodenkraft F_{tot} ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
F_{\text{tot}} &= F_c + F_b \\
&= kx + b\dot{x} \\
&= k\rho \sin(\omega t - \varphi) + b\rho\omega \cos(\omega t - \varphi) \\
&= \rho k \sqrt{1 + \left(\frac{b\omega}{k}\right)^2} \sin(\omega t - \beta) \\
&= \rho k \sqrt{1 + (2D\eta)^2} \sin(\omega t - \beta) \\
&= \mu e k \, \eta^2 \sqrt{\frac{1 + (2D\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \sin(\omega t - \beta) \ .
\end{aligned}$$

Wegen $m_1 e \omega^2 = \mu e k \eta^2$ setzen wir den Vergrößerungsfaktor für die Bodenkraft gleich

$$\eta^2 \sqrt{\frac{1 + (2D\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \ .$$

Das Schaubild dieser Funktion ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Man beachte, dass alle Kurven durch den Punkt $(\sqrt{2}, 2)$ gehen. Der Verlauf von V_4 zeigt auch: geringer Dämpfungsgrad führt

zu großen Amplituden im Resonanzbereich. Höherer Dämpfungsgrad unterdrückt zwar die Resonanzeffekte, bewirkt aber große Kraftamplituden bei zunehmender Drehzahl.

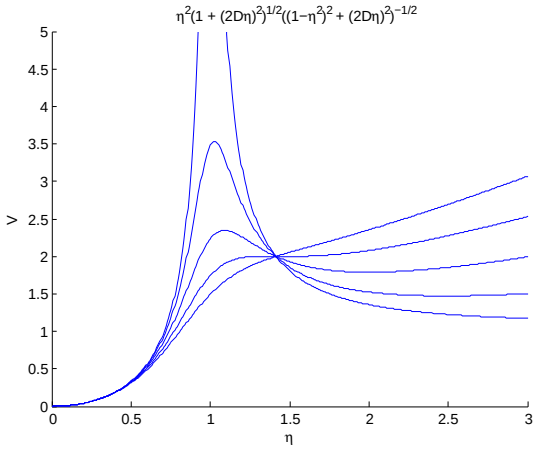


ABBILDUNG 2.6. Bodenkraftamplitude für D = 0.05, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45

Das Verhältnis V_d der Amplitude der auf den Boden übertragenen Kraft zur Amplitude der durch die Unwucht auf das System wirkenden Kraft bezeichnet man als DURCHLÄSSIGKEIT.

$$V_d = \mu e c \eta^2 \sqrt{\frac{1+(2D\eta)^2}{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}\,\frac{1}{m_1 e\omega^2}\ .$$

Wegen

$$\frac{\mu e k \eta^2}{m_1 e \omega^2} = \frac{k\eta^2}{m\omega^2} = 1$$

ist

$$V_d = \sqrt{\frac{1+(2D\eta)^2}{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}, \tag{2.15}$$

siehe die Abbildungen in Abschnitt 6; dort ist V_d als V_2 dargestellt. Man erkennt am Schaubild: geringer Dämpfungsgrad führt zwar zu hohen Amplituden im kritischen Bereich um $\eta \approx 1$, aber dafür nimmt im überkritischen Bereich $\eta > 1$ die Durchlässigkeit rasch ab. Interpretation: Die federnde Lagerung schirmt die an der Masse wirkenden Kräfte zum Fundament hin ab; man spricht von SCHWINGUNGSISOLIERUNG.

5.2. Modell eines Fahrzeugs. Das einfachste Fahrzeugmodell ist in Abbildung 2.8 dargestellt. Es ist ein einfaches Feder-Masse System mit Dämpfung, das an der Basis durch die Unebenheit der Fahrbahn erregt wird.
Wir wollen den Einfluss der Fahrbahn auf das Schwingungsverhalten des Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit untersuchen, also die Auslenkungen, Beschleunigungen und Kräfte berechnen. Dazu nehmen wir an, die Fahrbahnhöhe y als Funktion des Weges s sei $y = Y\sin(as)$. Bei konstanter Geschwindigkeit v ist also $y = Y\sin(avt)$. Mit der Bezeichnung $\omega = av$ wird das zu

$$y(t) = Y\sin(\omega t).$$

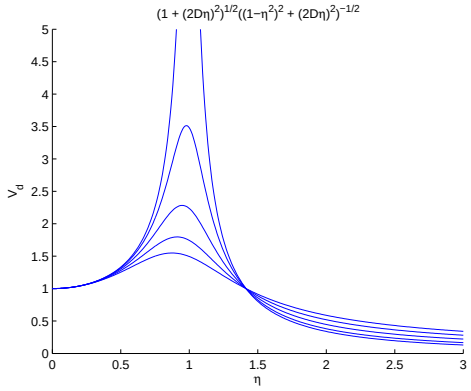


ABBILDUNG 2.7. Durchlässigkeit für D = 0.05, 0.15, 0.25, 0.35 und 0.45

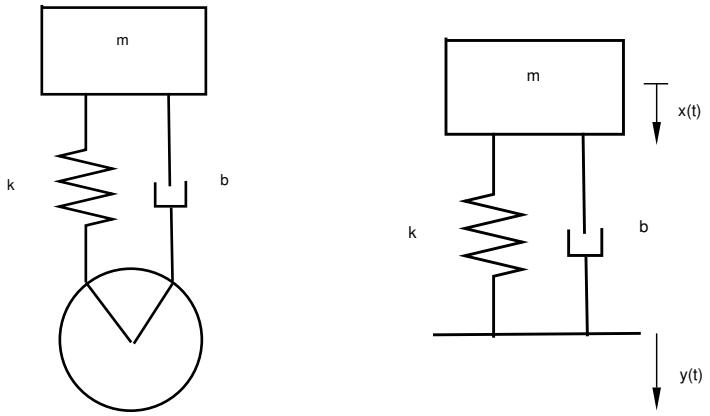


ABBILDUNG 2.8. Einfaches Fahrzeugmodell, Basiserregung

Die zu bestimmende Bewegung der Masse m sei $x(t)$ (siehe Abbildung 2.8). Wir erhalten die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + b\frac{d}{dt}(x(t) - y(t)) + k\,(x(t) - y(t)) = 0, \tag{2.16}$$

das ist mit $y(t) = Y\sin(\omega t)$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\,Y\omega\cos(\omega t) + k\,Y\sin(\omega t)\ . \tag{2.17}$$

Wir nützen die Linearität: Die Erregerkraft setzt sich aus zwei Termen zusammen,

$$p_1 = b\,Y\omega\cos(\omega t) \tag{2.18}$$

$$p_2 = k\,Y\sin(\omega t) \tag{2.19}$$

mit entsprechenden partikulären Lösungen laut Gleichung (2.11)

$$x_1 = \frac{Yb\omega}{k}V(\eta)\cos(\omega t - \varphi) \tag{2.20}$$

$$x_2 = YV(\eta)\sin(\omega t - \varphi) \tag{2.21}$$

Insgesamt ist die Dauerlösung $x(t)$ die Summe der beiden Einzellösungen.

$$x(t) = \frac{Y}{k} V(\eta)\big(b\omega\cos(\omega t - \varphi) + k\sin(\omega t - \varphi)\big),$$

wobei

$$\varphi = \arctan\frac{2D\eta}{1-\eta^2} \quad \text{und} \quad V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}\ .$$

Wir können die Summe aus Sinus- und Cosinusschwingung zu einer reinen Sinusschwingung mit zusätzlicher Phasenverschiebung $\psi = \arctan(2D\eta)$ umformen (vergleiche Zusammenfassung 1.2).

$$\begin{aligned} b\omega\cos(\omega t - \varphi) \quad &+ \quad k\sin(\omega t - \varphi) \\ &= \quad k\left[\sin(\omega t - \varphi) + \frac{b\omega}{k}\cos(\omega t - \varphi)\right] \\ &= \quad k\left[\sin(\omega t - \varphi) + 2D\eta\cos(\omega t - \varphi)\right] \\ &= \quad k\sqrt{1 + (2D\eta)^2}\,\sin(\omega t - \varphi + \psi), \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$x(t) = Y\sqrt{\frac{1 + (2D\eta)^2}{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}\,\sin(\omega t - \varphi + \psi). \tag{2.22}$$

Alternativer Lösungsweg. Ein Ansatz mit komplexer Exponentialfunktion hätte uns die rechentechnisch mühsamen Winkelfunktions-Umformungen erspart.

$y(t) = Y\exp(i\omega t)$ Erregerkraft (Imaginärteil davon ist Sinusschwingung) (2.23)

$x(t) = X\exp(i\omega t)$ Lösungsansatz (2.24)

Einsetzen in (2.16) liefert sofort

$$X = Y\frac{k + i\ b\omega}{k - m\omega^2 + i\ b\omega} = Y\frac{1 + i\ 2D\eta}{1 - \eta^2 + i\ 2D\eta}$$

Der Betrag des komplexen Bruchterms entspricht dem Verstärkungsfaktor für die Erreger-Amplitude Y. (Erinnerung: Betrag eines Bruches ist Betrag des Zählers durch Betrag des Nenners!) Damit erhalten Sie sofort den Wurzelterm in Gleichung (2.22). Der Phasenwinkel des komplexen Bruchterms ergibt die Phasenverschiebung. (Erinnerung: Phasenwinkel des Bruches ist Phasenwinkel des Zählers minus Phasenwinkel des Nenners!) Tatsächlich ist ψ in Gleichung (2.22) der Phasenwinkel des Zählers und φ der Phasenwinkel des Nenners.
Für unser einfaches Fahrzeugmodell aus Abbildung 2.8 treffen wir nun folgende Annahmen:

$$\begin{aligned} m &= 50\,\mathrm{kg} \\ k &= 4\cdot 10^4\,\mathrm{N/m} \\ b &= 300\,\mathrm{Ns/m} \end{aligned}$$

Des Weiteren habe die sinusförmige Fahrbahn eine Amplitude von einem Zentimeter, wobei die Maxima 2,5 m voneinander entfernt seien. Die Gleichung der Fahrbahnoberfläche ist also

$$y(s) = 0,01\,\sin\left(\frac{2\pi s}{2{,}5}\right)$$

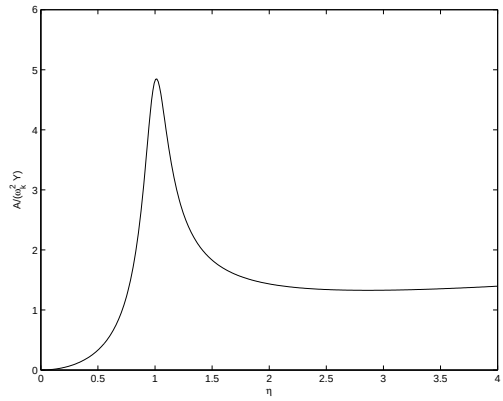


ABBILDUNG 2.9. Vergrößerungsfaktor der Beschleunigung

BEISPIEL 2.1. Für das soeben beschriebene Fahrzeug auf welliger Fahrbahn berechne man die Schwingungsamplitude von m für $v = 52\,\mathrm{m/s}$.

5.3. Aufgaben.

AUFGABE 2.4. *Man leite analog zur Gleichung 2.17 eine Gleichung für die Relativbewegung* $z(t) = x(t) - y(t)$ *her und zeige*

$$z(t) = Y \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \sin(\omega t - \varphi),$$

wobei $\varphi = \arctan\big(2D\eta/(1-\eta^2)\big)$.

AUFGABE 2.5. *Man berechne die maximale Beschleunigung* A *von* m *aus Beispiel 2.1.*

AUFGABE 2.6. *Man zeige, dass* A *der Beziehung*

$$\frac{A}{\omega_k^2 Y} = \eta^2 \sqrt{\frac{(1 + (2D\eta)^2}{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

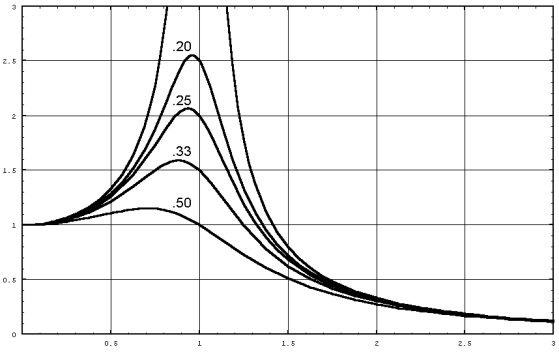
genügt. Bei welchen Geschwindigkeiten treten die Extremwerte von $A/(\omega_k^2 Y)$ *auf?*

6. Ergänzendes Material

6.1. Vergrößerungsfunktionen. Diese Funktionen geben in dimensionsloser Form den frequenzabhängigen Verlauf einer Weg- (Kraft-, Beschleunigungs- ...) Amplitude an, bezogen auf einen mit der Erregerfunktion zusammenhängenden Systemparameter. Vier Vergrößerungsfunktionen treten in unterschiedlichen Zusammenhängen auf.

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

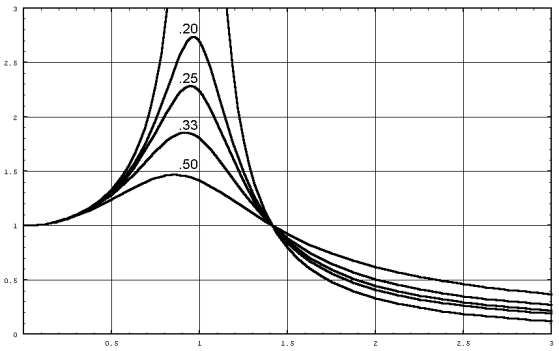
Wegamplitude (bei frequenzunabhängiger Kraftamplitude), bezogen auf statische Auslenkung $\frac{F_0}{k}$, siehe Gleichung 2.11 (dort ohne Subskript als V bezeichnet).



Gilt auch bei Erregung über Basis: Relativbewegung bezogen auf Basisbeschleunigung/ω_k^2 (Beschleunigungs-Sensor).

$$V_2 = \sqrt{\frac{1 + (2D\eta)^2}{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

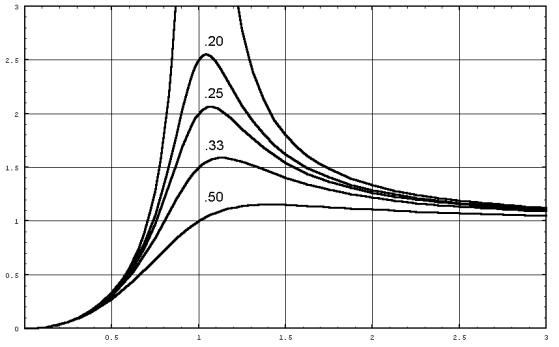
Durchlässigkeit: Amplituden-Verhältnis Bodenkraft zu Erregerkraft. Gilt bei konstanter ebenso wie bei frequenzabhängiger Erregerkraft, siehe Gleichung 2.15.



Gilt auch bei Erregung über Basis: Verhältnis Weg-, Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsamplitude zu entsprechender Basis-Amplitude, siehe Gleichung 2.17.

$$V_3 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

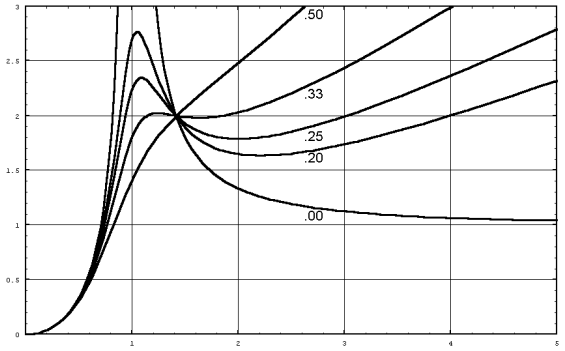
Wegamplitude (Erregung durch Unwucht), bezogen auf Exzentrizität μe , siehe Abschnitt 5.1, Gleichung 2.14.



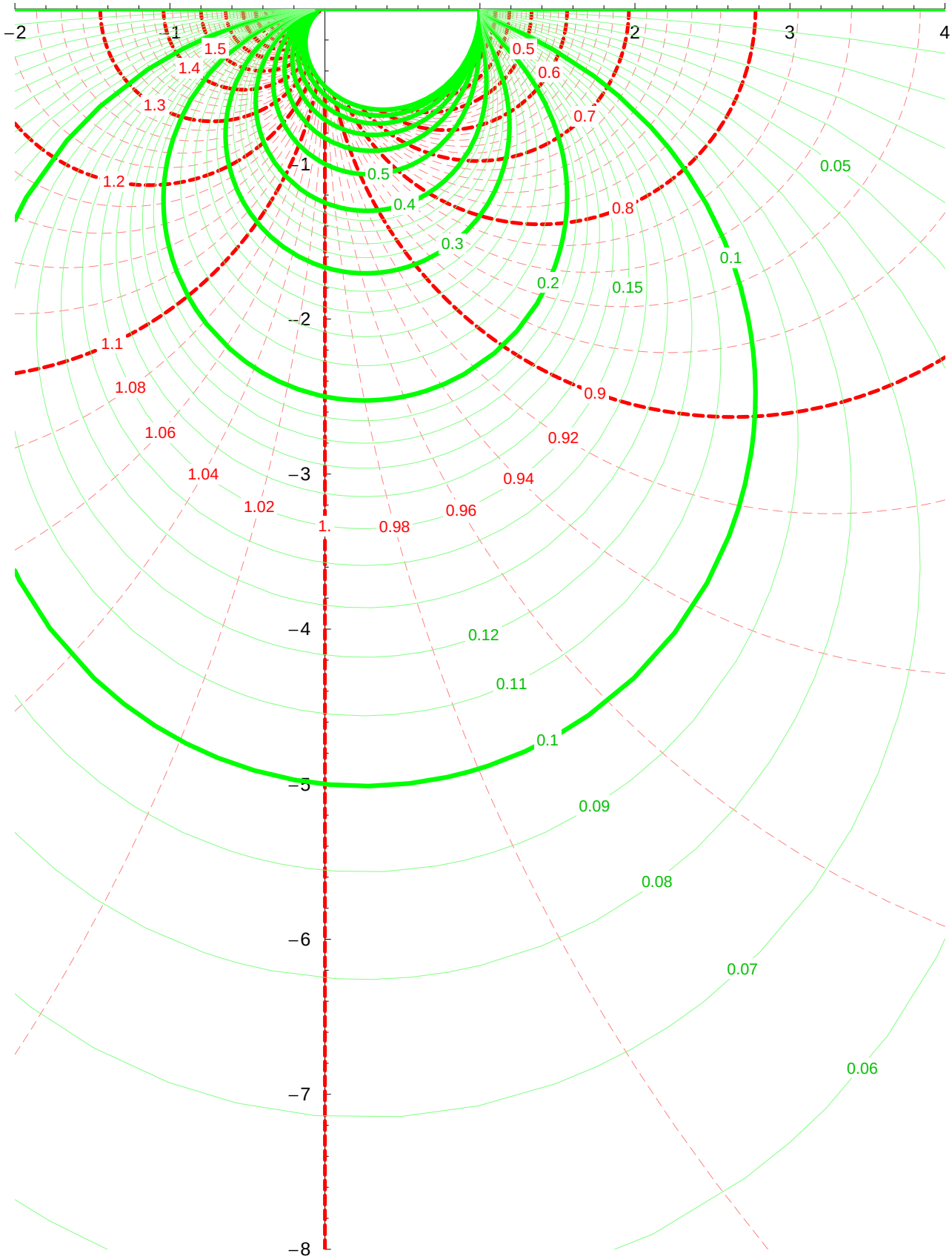
Gilt auch bei Erregung über Basis: Relativbewegung bezogen auf Basisbewegung, siehe Aufgabe 2.4.

$$V_4 = \eta^2 \sqrt{\frac{1 + (2D\eta)^2}{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

Bodenkraftamplitude (Erregung durch Unwucht), bezogen auf $\mu e k$, siehe Abschnitt 5.1.



Gilt auch bei Basis-Erregung: übertragene Kraftamplitude bezogen auf kY, oder: Beschleunigungs-Amplitude bezogen auf $\omega_k^2 Y$, vergleiche Aufgabe 2.6.


−2
−1
1
2
3
4
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1.08
1.06
1.04
1.02
1.
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.5
0.4
0.3
0.2
0.15
0.1
0.05
0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06

Die Frequenzübertragungsfunktion $H(\eta, D) = \dfrac{1}{1 - \eta^2 + i2D\eta}$ in der komplexen Zahlenebene für verschiedene Werte von η (rote Kurven) und D (grüne Kurven).
Sind Betrag der Vergrößerungsfunktion und Phasenwinkel bekant (Messung), dann lassen sich aus dem Diagramm D und η bestimmen.

Testfragen.

(1) Ordnen Sie den den Lösungstyp zu (Zeichnen Sie entsprechende Pfeile)!

$3\ddot{x} + 12\dot{x} + 12x = 0$

$\ddot{x} + 5\dot{x} + 25x = 0$

$25\ddot{x} + 32\dot{x} + 9x = 0$

$\frac{1}{6}\ddot{x} + \frac{5}{8}\dot{x} + \frac{2}{3}x = 0$

$x(t) = \rho e^{-\delta t}\cos(\omega_D t - \varphi)$

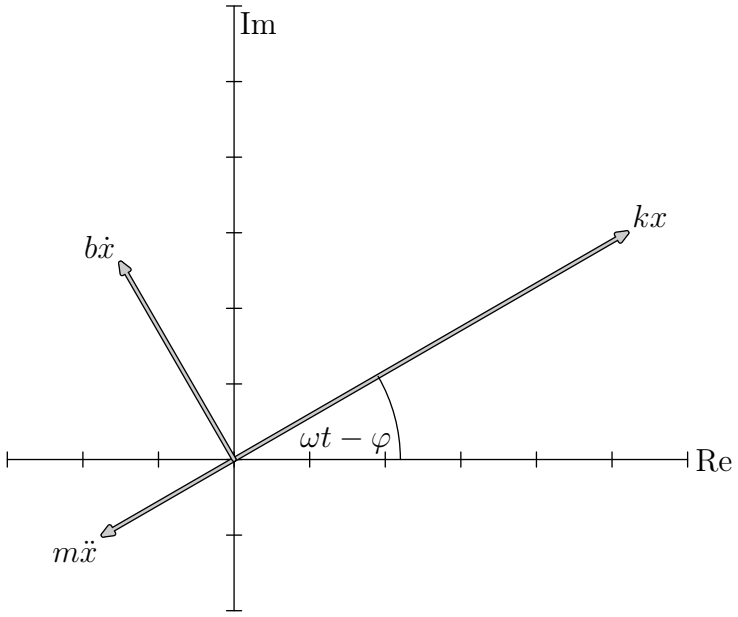
$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}$

$x(t) = e^{-\delta t}(A\sinh\omega^* t + B\cosh\omega^* t)$

(2) Ein Feder-Masse-Dämpfer-System gehorcht der Differentialgleichung

$$\frac{1}{9}\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} + 3x = F$$

Darin ist F eine harmonische Erregerkraft, $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$. Die Dauerlösung in komplexer Form ist $x = \rho e^{i(\omega t - \varphi)}$. Das Bild zeigt maßgetreu die Massen-, Dämpfungs- und Federkraft als Vektoren in der komplexen Ebene. Dabei ist $\rho = 2$ und $\omega = 3$ gewählt.



(a) Zeichnen Sie F als Resultierende ein

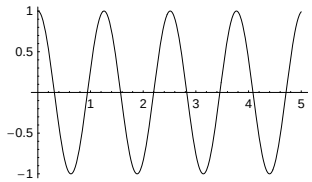
(b) Lesen Sie aus Ihrer Zeichnung die Amplitude von F und die Phasenverschiebung ϕ zwischen x und F ab.

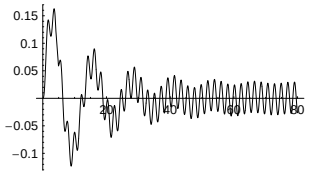
(c) Geben Sie (aus den Formeln für Verstärkungsfaktor und Phasenverschiebung) auch die rechnerischen Werte für Amplitude von F und die Phasenverschiebung φ an.

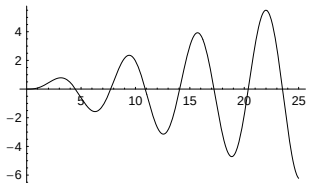
(3) Für vier der sechs Differentialgleichungen a–f sind Lösungen abgebildet. Ordnen Sie zu!

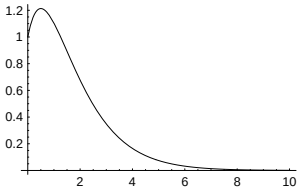
a. $\ddot{x} + 25x = 0$ b. $2\ddot{x} + 2x = \sin t$ c. $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$

d. $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ e. $25\ddot{x} + x = 0$ f. $4\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} + x = \sin(3t)$

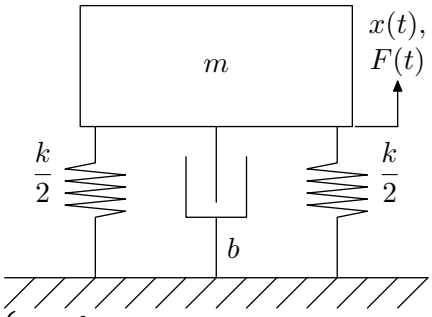








(4) Am hier skizzierten Systems greift eine harmonische Kraft $F(t) = F_0 \sin \omega t$ an.
Es ist $m = 1\,\mathrm{kg}$, $F_0 = 5\,\mathrm{N}$,
$\omega = 26\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_k = 25\,\mathrm{s}^{-1}$ und $\omega_D = 24\,\mathrm{s}^{-1}$.

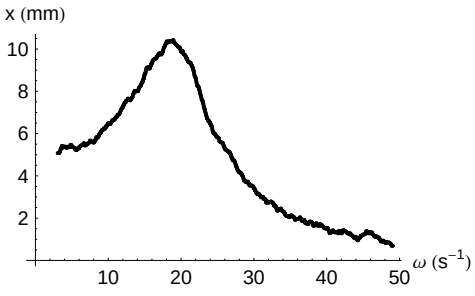


(a) Richtige Aussagen ankreuzen: Die Anregung ist { ☐ über- / ☐ unter- } -kritisch, die Phasenverschiebung zwischen $x(t)$ und $p(t)$ daher { ☐ kleiner / ☐ größer } als $\frac{\pi}{2}$.

(b) Was sind die Werte von b, k, D und δ?

(c) Welche Amplitude hat die Dauerlösung?

(5) An einer Resonanzprüfmaschine wurde experimentell die Auslenkung bei konstanter Kraftamplitude in Abhängigkeit von der Erreger-Kreisfrequenz aufgenommen.
   (a) Bestimmen sie (näherungsweise) ω_k, D und δ.
   (b) Um welchen Faktor unterscheiden sich ω_k und ω_D?
   (c) Um wieviel ist der ω-Wert am Maximums gegenüber ω_k verschoben?



KAPITEL 3

Allgemeine Erregerkräfte

Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t).$$

In diesem Kapitel widmen wir uns allgemeinen Erregerkräften $F(t)$. Einfache und wichtige Sonderfälle sind

- sprunghafte Erregung,
- stoßartige Erregung,
- periodische Erregung und
- transiente Erregung.

Im Fall *transienter Erregerkräfte*, also Erregungen beschränkter Dauer, bei denen die Erregerkraft nach einer bestimmten Zeit wieder Null wird oder einen konstanten Wert annimmt, klingt auch die Lösung $x(t)$ im Lauf der Zeit ab[1] oder strebt einem konstanten Wert zu: $x(t) \to \text{const}$ für $t \to \infty$. Wir sind hier am *transienten* Verlauf von $x(t)$ interessiert, insbesondere am Maximal-Ausschlag $\max|x(t)|$.
Die zentrale Idee in diesem Kapitel ist eine Zerlegung der allgemeinen Erregerkraft $F(t)$ in kleinere Teilkräfte. Für jede dieser Teilkräfte lösen wir dann die Schwingungsgleichung und erhalten die allgemeine Lösung als Superposition dieser Teillösungen. Je nachdem, welche Zerlegung man verwendet erhält man ein Duhamel[2]-Integral (Abschnitte **??** und **??**), eine Fourierreihe[3] (Abschnitt 5) oder ein Fourier-Integral (Abschnitt 6).

1. Sprunghafte Erregung

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit der Betrachtung eines Einschaltvorganges. Dabei kommt es zu einem plötzlichen Lastsprung bei $t = 0$. Diese Erregung kann man durch eine Stufenfunktion oder Heaviside-Funktion modellieren.

Definition 3.1

Die Funktion

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0, \\ 1 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

nennt man Einheitssprungfunktion oder auch Heavisidefunktion.

[1] Wir setzen dabei $D > 0$ voraus, denn in realen Systemen ist immer eine gewisse Dämpfung vorhanden, sei sie auch noch so klein.
[2] nach Jean-Marie Constant Duhamel (1797 – 1872)
[3] nach Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830)

Eine allgemeine Stufenfunktion der Höhe F_1 können wir daher wie folgt modellieren:

$$F(t) = F_1 \cdot \Theta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ F_1 & t > 0 \end{cases}$$

Nehmen wir zusätzlich an, dass wir keine Anfangsauslenkung ($x(0) = 0$) und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{x}(0) = 0$) haben.
Dann gilt für $t > 0$

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_k^2 x(t) = \frac{F_1}{m} \tag{3.1}$$

mit

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad \text{und} \quad \omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Man überprüft leicht, dass

$$x_p(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{F_1}{m\omega_k^2} & t > 0 \end{cases}$$

eine partikuläre Lösung von (3.1) ist. Nehmen wir an, dass der unterkritisch gedämpfte Fall vorliegt. Dann lautet die homogene Lösung

$$x_h(t) = e^{-\delta t}\left(A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)\right)$$

mit

$$D = \frac{\delta}{w_k} \quad \text{und} \quad \omega_D = \omega_k\sqrt{1 - D^2}.$$

Von den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$x(0) = -\frac{F_1}{m\omega_k^2} + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{F_1}{m\omega_k^2}.$$

und

$$\dot{x}(0) = -\delta A + B\omega_k = \frac{\delta F_1}{m\omega_k^2} + B\omega_D = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\delta F_1}{m\omega_k^2\omega_D}.$$

Somit ist die Lösung in diesem Fall

$$x(t) = \frac{F_1}{m\omega_k^2}\left(1 - e^{-\delta t}\left(\cos(\omega_D t) + \frac{\delta}{\omega_D}\sin(\omega_D t)\right)\right)\Theta(t).$$

Die Funktion

$$h_S(t) = \frac{1}{m\omega_k^2}\left(1 - e^{-\delta t}\left(\cos(\omega_D t) + \frac{\delta}{\omega_D}\sin(\omega_D t)\right)\right)\Theta(t) \tag{3.2}$$

wird als *Sprungantwort* bezeichnet. Damit lässt sich die Lösung ganz einfach als $x(t) = F_1 h_S(t)$ schreiben.
Nun gehen wir einen Schritt weiter und nehmen an, dass unsere Last aus zwei Sprüngen besteht:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ F_1 & 0 < t \leq \tau_1, \\ F_2 & \tau_1 < t. \end{cases}$$

Dabei handelt es sich offensichtlich um eine Überlagerung $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ der beiden Funktionen

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0, \\ F_1 & t > 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad F_2(t) = \begin{cases} 0 & t \le \tau_1, \\ F_2 - F_1 & t > \tau_1. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Heavisidefunktion können wir die Überlagerung als

$$F(t) = F_1 \cdot \Theta(t) + (F_2 - F_1)\Theta(t)$$

schreiben. Die Sprungantwort in (3.2) liefert uns die Lösung

$$x(t) = F_1 h_S(t) + (F_2 - F_1)\Theta(t - \tau_1).$$

Noch allgemeiner erhalten wir bei n Sprüngen

$$\begin{aligned} F(t) &= F_1\Theta(t) + (F_2 - F_1)\Theta(t - \tau_1) + \cdots + (F_n - F_{n-1})\Theta(t - \tau_{n-1}) \\ &= F_1\Theta(t) + \sum_{k=1}^{n-1}(F_{k+1} - F_k)\Theta(t - \tau_k) \end{aligned}$$

und somit als Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= F_1 h_S(t) + (F_2 - F_1)h_S(t - \tau_1) + \cdots + (F_n - F_{n-1})h_S(t - \tau_{n-1}) \\ &= F_1 h_S(t) + \sum_{k=1}^{n-1}(F_{k+1} - F_k)h_S(t - \tau_k). \end{aligned}$$

Eine allgemeine stückweise stetige Funktion $F(t)$ als Erregerkraft können wir mittels Treppenfunktionen approximieren. Dann erhalten wir

$$F(t) \approx F(0)\Theta(t) + \sum_{k\ge1} \left(F(\tau_{k+1}) - F(\tau_k)\right)\Theta(t - \tau_k).$$

Wir setzen $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ und erhalten für die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &\approx F(0)h_S(t) + \sum_{k\ge1} \left(F(\tau_{k+1}) - F(\tau_k)\right) h_S(t - \tau_k) \\ &= F(0)h_S(t) + \sum_{k\ge1} \frac{F(\tau_{k+1}) - F(\tau_k)}{\tau_{k+1} - \tau_k} h_S(t - \tau_k)\Delta\tau_k. \end{aligned}$$

Mit $\Delta\tau_k \to 0$ wird die Approximation immer besser und aus der Summe wird ein Integral. Es folgt

$$x(t) = F(0)h_S(t) + \int_0^t F'(\tau)h_S(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.3}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $h_S(t - \tau) = 0$ ist für $\tau \ge t$.
Oftmals wird bereits dieses Integral als Duhamel-Integral bezeichnet. Wir werden diese Bezeichnung für das entsprechende Integral bezüglich der Impulsantwort verwenden (siehe (3.4)).

2. Stoßartige Erregung

Um die Darstellung in (3.3) für allgemeine Funktionen $F(t)$ verwenden zu können, müssen wir die Ableitung $F'(t)$ kennen. Das ist in der Praxis oft nicht möglich, weil wir zum Beispiel die Werte von $F(t)$ nur tabellarisch vorliegen haben und somit die Ableitung approximieren müssten. Daher würden wir gerne mittels partielle Integration die Ableitung von der Funktion F auf die Sprungantwort h_S übertragen.
Erinnern wir uns, dass

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = [f(\tau)g(\tau)]_{\tau=t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)g'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Dann ergibt sich für (3.3)

$$\begin{aligned} x(t) &= F(0)h_S(t) + F(t)h_S(0) - F(0)h_S(t) - \int_0^t F(\tau)h_S'(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_0^t F(\tau)h_S'(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Ableitung von $h_S(t-\tau)$ berechnen. Für die Heavisidefunktion wissen wir aus Beispiel A.5, dass $\Theta' = \delta$ über den Distributionen gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}h_S(t-\tau) &= \frac{1}{m\omega_k^2}\left[-\delta e^{-\delta(t-\tau)}\left(\cos(\omega_D(t-\tau)) + \frac{\delta}{\omega_D}\sin(\omega_D(t-\tau))\right)\right]\Theta(t-\tau) \\ &\quad + \frac{1}{m\omega_k^2}\left[-e^{-\delta(t-\tau)}\left(\omega_D\sin(\omega_D(t-\tau)) - \delta\cos(\omega_D(t-\tau))\right)\right]\Theta(t-\tau) \\ &\quad - \frac{1}{m\omega_k}(1-1) \\ &= -\frac{1}{m\omega_k^2}e^{-\delta(t-\tau)}\left(\frac{\delta^2+\omega_D^2}{\omega_D}\right)\sin(\omega_D(t-\tau)) \\ &= -\frac{1}{m\omega_D}e^{-\delta(t-\tau)}\sin(\omega_D(t-\tau)), \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\omega_k^2 = \delta^2 + \omega_D^2$.
Mit der Impulsantwort

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0, \\ \frac{1}{m\omega_D}e^{-\delta t}\sin(\omega_D t) & t > 0, \end{cases}$$

folgt

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.4}$$

Diese Darstellung der Lösung $x(t)$ für allgemeine Kraftterme $F(t)$, die ab $t \ge 0$ wirken, heißt in der Maschinendynamik (in diesem Skript und manchen anderen Lehrbüchern) Duhamel-Integral. In der englischen Fachsprache ist *Duhamel's Integral* ziemlich geläufig, die deutsche Wikipedia und das Lehrbuch von Brommundt und Sachau [**1**] kennen diesen Begriff nicht; Magnus, Popp und Sextro [**4**] schon (aber nicht genau in der gleichen Form wie

hier). Auch in der Mathematik wird der Begriff „Duhamel-Integral“ etwas allgemeiner für lineare partielle Differentialgleichungen aufgefasst.
Eine gleichwertige Formulierung, die sich durch Substitution $(t-\tau) \to u$ ergibt, ist manchmal rechnerisch einfacher auszuwerten:

$$x(t) = \int_0^t F(t-u)\, h(u)\, du. \tag{3.5}$$

Die Integralformel 3.4 gilt auch mit unterer Grenze $t = -\infty$ und berücksichtigt damit Erregerkräfte, die schon für $t < 0$ wirken; für Kraftterme mit $F(t) = 0$, falls $t < 0$ macht es sowieso keinen Unterschied, ob $t = 0$ oder $t = -\infty$ untere Grenze ist.
Klarer Weise (im Weltbild der klassischem Mechanik) kann die Lösung zur Zeit t nur von Krafttermen beeinflusst sein, die vorher, also zu Zeiten $s < t$ gewirkt haben. Deswegen endet das Integral mit oberer Grenze $s = t$. Andererseits ist für $s \geq t$ der Ausdruck $h(t-s)$ gleich 0, weil Fundamentallösung h für negative Argumente gleich 0 sind. Insofern macht es nichts, die obere Grenze nach $+\infty$ zu legen. Dann ergibt sich ein in vielen Anwendungen auftretender Integralausdruck, eine Faltung.

Man nennt die Darstellung

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Faltung von h und F und schreibt dafür

$$x(t) = (h * F)(t)\ .$$

Eine Faltung ordnet zwei Funktionen h und F, beide $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine neue Funktion $x = (h * F) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu.

Sowohl Laplace- als auch Fouriertransformation führen die Faltung zweier Funktionen in eine Multiplikation der transformierten Funktionen über. Ein schwierig auszuwertendes Integral im Zeit-Bereich lässt sich so in eine einfache Multiplikation im Frequenzraum überführen. Die Laplace-Transformation hat gegenüber der Fourier-Transformation den Vorteil, dass $h(t)$ eine reellwertige Bildfunktion hat. Im Abschnitt 6.2 berechnen wir die Fouriertransformierte von $h(t)$, und, Überraschung, es ist die alte Bekannte $H(\omega)$ von Gleichung 2.6.

3. Fundamentallösungen

Wir haben uns so über das Duhamel-Integral gefreut, dass wir ganz vergessen haben, zu begründen, dass h wirklich eine Impulsantwort darstellt. Ein Impuls ist eine Erregerfunktion der Form $F(t) = p_0\delta(t)$. Aus dem Abschnitt 1 wissen wir, dass $h_S(t)$ eine Sprungantwort ist, d.h. $x(t) = p_0 h_S(t)$ löst die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = p_0\Theta(t). \tag{3.6}$$

Wir können diese Gleichung nach t ableiten und erhalten (mit Beispiel A.5)

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = p_0\delta(t), \tag{3.7}$$

wobei wir $y = \dot{x}$ gesetzt haben. Diese Differentialgleichung ist zwar über den Distributionen formuliert, das soll uns aber nicht weiter stören. Nachdem $x(t) = p_0 h_S(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (3.6) ist, löst $y(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_0 h_S(t)\right) = p_0 h_I(t)$ die Differentialgleichung (3.7).

Definition 3.2

Jede Lösung $h\colon t \mapsto h(t)$ von (3.7), heißt FUNDAMENTALLÖSUNG. Man spricht auch von der IMPULSANTWORT, englisch: *unit-impulse response function*.

Eigentlich sollte die Impulsgröße p_0 den Wert $p_0 = 1\,\mathrm{Ns}$ haben; nur dann formuliert die Gleichung (3.7) eine Kräftebilanz und $h(t)$ wäre dimensionsmäßig eine Länge. Setzt man $p_0 = 1$ oder lässt es gleich weg (das ist so üblich), ändert sich nichts an den Zahlenwerten, aber $h(t)$ hat dann Dimension Länge/Impuls. Das ist aber kein Problem, denn in weiterer Folge wird h immer mit einer Impulsgröße oder einem Term Kraft mal Zeit multipliziert, damit als Ergebnis eine Länge herauskommt.
Kurzfassung: Weil am Ende alle Formeln eh wieder stimmen, macht sich niemand die Mühe, einen Term $p_0 = 1$ oder $p_0 = 1\,\mathrm{Ns}$ bei Definitionen anzuführen und bei Herleitungen mitzuschleppen.
„Fundamentallösung“ ist der allgemeine Begriff im Kontext von Differentialgleichungen. In den Anwendungen gibt es je nach Fachgebiet weitere Bezeichnungen (Impulsantwort, englisch: *unit-impulse response function*). Speziell in anderen Maschinendynamik-Lehrbüchern:

- MAGNUS, POPP und SEXTRO [**4**] sprechen von der Stoß-Übergangsfunktion oder auch Gewichtsfunktion.
- BROMMUNDT und SACHAU [**1**] verwenden Stoßantwort.
- J. und H. DANKERT [**2**] behandeln nur harmonische Erregerkräfte, dort kommt der Begriff nicht vor.

Die Fundamentallösung h hängt von der Art des Systems (ob ungedämpft, unter-, über- oder kritisch gedämpft) ab. Hier ist eine Zusammenstellung der Fundamentallösungen, jeweils für $t \geq 0$; Abbildung 3.2 zeigt die zugehörigen Funktionsgraphen.

Für $t < 0$ ist $h(t) = 0$. Für $t \geq 0$ ist

- die Fundamentallösung eines ungedämpften Systems

$$h(t) = \frac{1}{\omega_k m} \sin(\omega_k t) \; ; \tag{3.8}$$

- die Fundamentallösung eines unterkritisch gedämpften Systems ($0 < D < 1$, $\omega_D = \omega_k \sqrt{1 - D^2}$, $\delta = D\omega_k$)

$$h(t) = \frac{1}{\omega_D m} \, e^{-\delta t} \sin(\omega_D t) \; ; \tag{3.9}$$

- die Fundamentallösung eines kritisch gedämpften Systems

$$h(t) = \frac{t}{m} \, e^{-\delta t} \; ; \tag{3.10}$$

- die Fundamentallösung eines überkritisch gedämpften Systems ($D > 1$, $\omega^\star = \omega_k \sqrt{D^2 - 1}$)

$$h(t) = \frac{1}{m\omega^\star} \, e^{-\delta t} \sinh \omega^\star t \; . \tag{3.11}$$

Die physikalische Dimension von h ist in diesen Formeln, wie schon erwähnt, Länge/Impuls; erst nach Multiplikation von h mit dem übertragenen Gesamtimpuls ergibt sich eine Länge.

Zeitverschobene Fundamentallösung. Angenommen, der Stoß findet nicht zur Zeit $t = 0$, sondern bei $t = s$ statt. Das System ist also für $t < s$ in Ruhe; bei $t = s$ wird stoßartig Impuls $p(s)$ übertragen und das System beginnt zu schwingen. Die Auslenkung $x(t)$ gehorcht einer *zeitverschobenen Fundamentallösung*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < s, \\ p(s)h(t-s) & \text{für } t \geq s. \end{cases}$$

4. Beispiele

Das Duhamel-Integral 3.4 ist eine geschlossene Lösungsformel für allgemeine Kraftterme. Nützlich ist es aber nur für halbwegs einfache Funktionen, oder wenn ein Computeralgebra-System die Integration übernimmt.
Alternativen:

- Ansatz für partikuläre Lösung erraten, Anfangsbedingungen in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung berücksichtigen.
- Routinemäßig: Laplace-Transformation.
- Fouriertransformation (in der technischen Mechanik nicht so üblich wie die Laplace-Transformation).
- Letzter und einfachster Ausweg: numerische Lösung.

4.1. Linear anwachsende Erregerkraft ab $t = 0$, ungedämpftes System. Erregerkraft

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ at & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

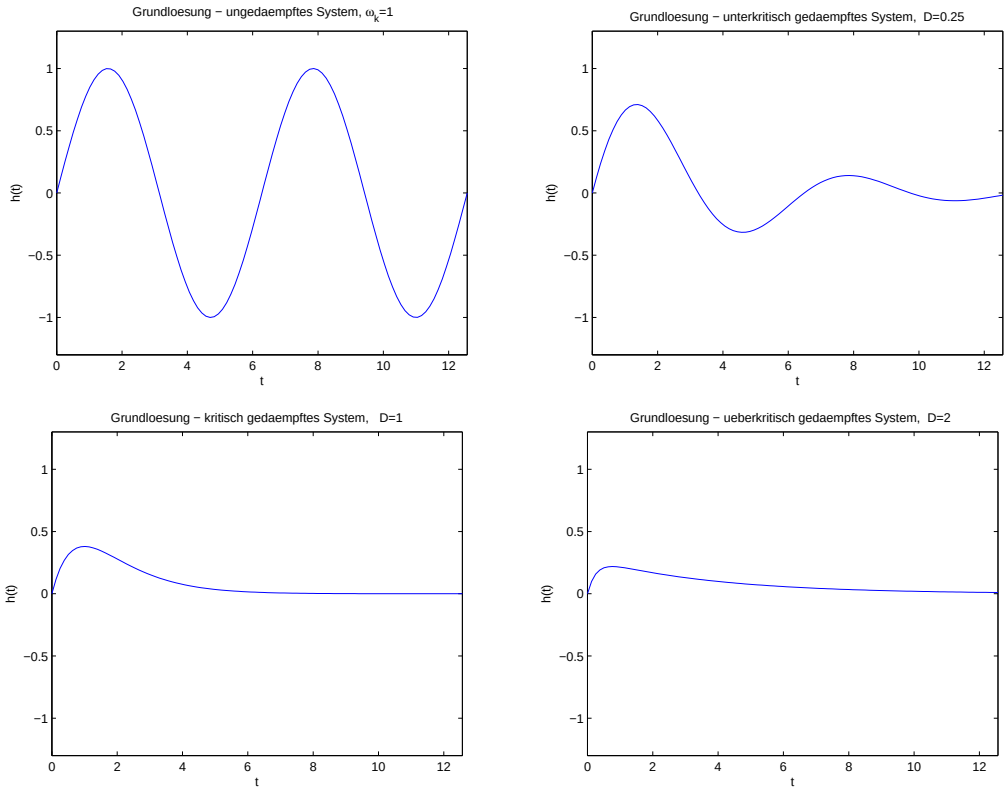


ABBILDUNG 3.1. Grundlösung für ein System mit $c = m = \omega_k = 1$ für verschiedene D: ungedämpft, unterkritisch, kritisch und überkritisch gedämpft

Wir geben vorerst dem dimensionsbehaftete Proportionalitätsfaktor a mit Einheit N/s den Wert $a = 1$, also $F(t) = t$, Kraft = Zeit. Um korrekte physikalischen Dimensionen, auch im Endergebnis, kümmern wir uns später. (Das heißt, wir multiplizieren das Endergebnis mit a). Auswerten des Duhamel-Integrals gibt

$$x(t) = \int_0^t F(s)h(t-s)ds = \int_0^t s \cdot \frac{1}{\omega_k m} \sin\left(\omega_k(t-s)\right) ds = \cdots$$

(...Konstante vor das Integral ziehen...)

$$= \frac{1}{\omega_k m} \int_0^t s \sin\left(\omega_k(t-s)\right) ds.$$

Substitution vereinfacht das Argument im Sinus:

$$\omega_k(t-s) = u\,, \quad s = t - \frac{u}{\omega_k}\,, \quad ds = -\frac{1}{\omega_k} du.$$

Achtung, auch die Integrationsgrenzen ändern sich!

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_k^2 m} \int_{u=\omega_k t}^0 (t - \frac{u}{\omega_k}) \sin u \, du$$

$$= -\frac{t}{\omega_k^2 m} \int_{u=\omega_k t}^0 \sin u \, du + \frac{1}{\omega_k^3 m} \int_{u=\omega_k t}^0 u \sin u \, du = \cdots$$

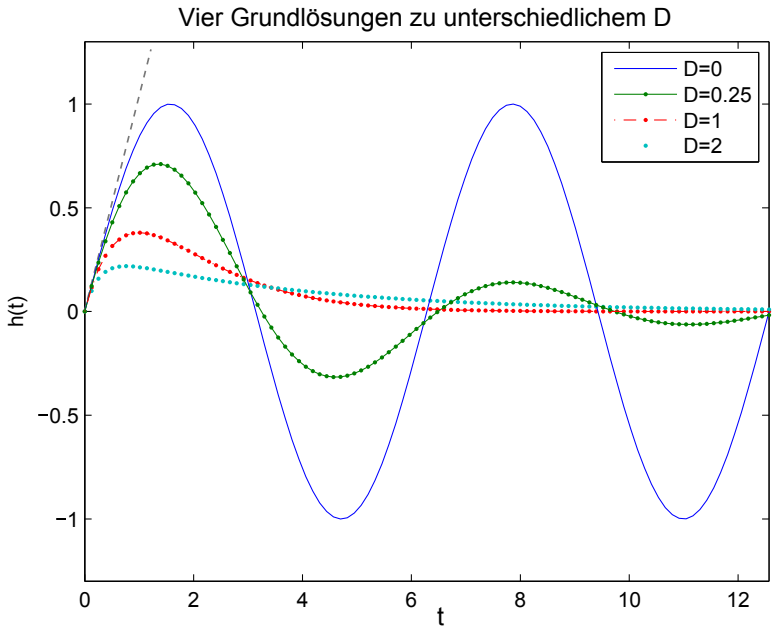


ABBILDUNG 3.2. Zahlenwerte von vier Fundamentallösungen (un-, unter-, über- und kritisch gedämpfter Fall) überlagert. Alle Lösungen starten von $h(0) = 0$ mit Anfangssteigung $\dot{h}(0) = 1$. Die kritisch gedämpfte Lösung klingt für $t \to \infty$ am schnellsten ab.

(... erstes Integral ist elementar, zweites braucht partielle Integration...)

$$= \frac{t}{\omega_k^2 m} \cos u \Big|_{u=\omega_k t}^{0} - \frac{1}{\omega_k^3 m} u \cos u \Big|_{u=\omega_k t}^{0} + \frac{1}{\omega_k^3 m} \int_{u=\omega_k t}^{0} \cos u \, du$$
$$= \frac{t}{\omega_k^2 m}(1 - \cos(\omega_k t)) - \frac{1}{\omega_k^3 m}(0 - \omega_k t \cos(\omega_k t)) + \frac{1}{\omega_k^3 m} \sin u \Big|_{u=\omega_k t}^{0} .$$

Die Cosinus-Terme fallen weg und es bleibt

$$x(t) = \frac{t}{\omega_k^2 m} - \frac{1}{\omega_k^3 m} \sin(\omega_k t) = \frac{t}{k} - \frac{1}{\omega_k k} \sin(\omega_k t).$$

Wir halten noch fest, dass dieser Ausdruck nur für $t \geq 0$ gilt; für $t < 0$ hat die Lösung von vornherein den Wert 0. Den dimensionsbehafteten Proportionaitätsfaktor a tragen wir auch noch nach und multiplizieren damit. Das Endergebnis ist somit

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \dfrac{a}{k}\left(t - \dfrac{1}{\omega_k} \sin \omega_k t\right) & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Diskussion und Kritik. Das Resultat für $t > 0$ lässt sich anschaulich interpretieren. Der erste Term (wir hätten ihn auch durch Ansatz als partikuläre Lösung finden können) entspricht formal einer *statischen Auslenkung* des Systems mit Steifigkeit k und angreifender Kraft $F = at$. Dieser statischen Auslenkung überlagern sich Sinuschwingungen mit Amplitude $a/(\omega_k k)$.

Man spricht von einer *maximalen überhöhung* der Auslenkung um $a/(\omega_k k)$ gegenüber statisch berechneter Kraftwirkung.
Der Rechenweg über das Duhamel-Integral, wenn er mit Papier und Stift bewältigt werden soll, ist mühsam. Bei weitem einfacher hätten wir das Resultat erhalten nach der Regel „Inhomogene Lösung ist partikuläre Lösung plus homogene Lösung“: Ein simpler Ansatz hätte den ersten Term als partikuläre Lösung von

$$m\ddot{x} + cx = at$$

geliefert. Der zweite Term ist eine Lösung der homogenen Gleichung, wobei die Konstante so gewählt ist, dass insgesamt $x(t)$ die Anfangsbedingungen $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ erfüllt.
Das Duhamel-Integrals ist wichtig, weil es einen *geschlossenen Ausdruck* für die Lösung liefert. Als Papier-und-Stift-Lösungsweg, womöglich noch ohne Integraltabelle, ist es mühsam.
Mit Computeralgebra-Unterstützung wäre die Rechnung ganz kurz und bündig verlaufen. Hier ein Screenshot (Wolfram Mathematica):

```
In[1]:= h[t_] := 1/(wk m) Sin[wk t]

In[2]:= x = Integrate[s h[t - s], {s, 0, t}] // Apart
```

$$\text{Out[2]=}\quad \frac{t}{m\,wk^2} - \frac{Sin[t\,wk]}{m\,wk^3}$$

So würde es in MATLAB aussehen:

```
syms m wk t s
h(t) = 1/(m * wk)*sin(wk* t);
x=int(s*h(t-s),s,0,t);
expand(x)

ans =
t/(m*wk^2) - sin(t*wk)/(m*wk^3)
```

4.2. Stoßartige („Impulsartige“) Erregerkräfte. Ist eine Störung nur von sehr kurzer Dauer, kann man die Störung mathematisch als Stoß oder „Impuls“[4] modellieren.
Die hier folgenden Rechnungen sind eigentlich redundant und wiederholen nur Argumente, die wir bei der Herleitung der Grundlösung gebracht haben: bei einer kurz dauernden, stoßförmig wirkenden Kraft kann man näherungsweise so rechnen, als würde der gesamte Impuls durch eine δ-Funktion übertragen. Die Näherungslösung ist eine der Fundamentallösungen (3.8–3.11), multipliziert mit dem übertragenen Gesamtimpuls.
Es sei F eine stoßartige Belastung unseres viskoelastischen Systems, d.h. $F = 0$ außerhalb eines kleinen Intervalls $[0, t_1]$. Für die Lösung x von

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

[4] *Impuls* nennt man vor allem in der Elektrotechnik einen nur kurz dauernden Strom- oder Spannungsstoß. Dieser Begriff ist aber ganz etwas anderes als die physikalische Größe Impuls = Masse mal Geschwindigkeit. Die Begriffs-Verwirrung entsteht auch, weil die englische Fachsprache die Begriffe *momentum* (Masse mal Geschwindigkeit) und *impulse* (Integral der Kraft über Zeit) unterscheidet.

für $t \geq t_1$ gilt dann

$$x(t) = e^{-\delta(t-t_1)} \left[\frac{\dot{x}(t_1) + \delta x(t_1)}{\omega_D} \sin \omega_D (t - t_1) + x(t_1) \cos \omega_D (t - t_1) \right].$$

Ist t_1 genügend klein, so wollen wir annehmen, $x(t_1)$ könne vernachlässigt werden. Es bleibt also noch $\dot{x}(t_1)$ zu berechnen. Dazu bilden wir

$$\int_0^{t_1} (m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t))dt = \int_0^{t_1} F(t)dt$$

$$m\dot{x}(t)\Big|_0^{t_1} + bx(t)\Big|_0^{t_1} + c\int_0^{t_1} x(t)dt = \int_0^{t_1} F(t)dt.$$

Wir wollen annehmen, dass $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Dann ist der erste Term auf der linken Seite $m\dot{x}(t_1)$, während wir die anderen Terme auf dieser Seite vernachlässigen können. Das heißt

$$\dot{x}(t_1) \cong \frac{1}{m} \int_0^{t_1} F(t)dt$$

Das ist aber nichts anderes als die Aussage: Endgeschwindigkeit ergibt sich aus übertragenem Impuls geteilt durch Masse. Aber weil die Masse nicht stillhält, sondern sich schon zu bewegen beginnt, bevor der gesamte Impuls übertragen ist, kann rücktreibend auch Feder- und Dämpferkraft angreifen, und somit gilt die Gleichung nur näherungsweise. Damit gilt weiters

$$x(t) \cong \frac{1}{m\omega_D} e^{-\delta(t-t_1)} \sin \omega_D (t - t_1) \int_0^{t_1} F(t)dt.$$

Man beachte, dass[5] für $F = \delta$ diese Formel die exakte Lösung, nämlich $h(t)$ liefert!
Für den maximalen Ausschlag bei kleinem D erhalten wir dann auch die Näherungsformel

$$x_{max} = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^{t_1} F(t)dt.$$

Ist F empirisch gegeben, so bildet man das Integral über F zweckmäßigerweise mit der Trapezregel.
Auch in diesem Fall ist der Vergrößerungsfaktor $V = x(t)k/F_0$ von besonderem Interesse.

AUFGABE 3.1. *Ein Projektil der Masse 2 kg wird durch ein Rohr abgeschossen. Der Kraftverlauf sei*

$$F(t) = 100 \sin\left(\frac{10\pi t}{8}\right) \qquad \textit{für} \qquad 0 \leq t \leq 0.8$$

(p in Newton, t in Sekunden, keine Dämpfung)
Wie groß ist die Geschwindigkeit des Projektils nach 0.8 Sekunden?

[5]Wieder Achtung! δ bezeichnet hier sowohl Dirac-Deltafunftion als auch Dämpfungskonstante. Sie wissen eh, wann welches δ gemeint ist.

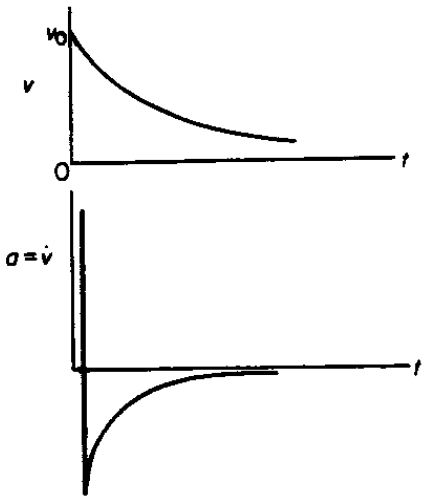


ABBILDUNG 3.3. Geschwindigkeits-Stoß

Diese Aufgabe hat eigentlich nichts mit Schwingungen zu tun, sondern integriert lediglich die einfache Bewegungsgleichung $m\ddot{x}(t) = F(t)$.

4.3. Basiserregung durch Geschwindigkeits-Stoß. Gegeben sei das Feder-Masse System aus Abbildung 2.8 auf Seite 43, das an der Basis erregt wird. Es genügt der Gleichung 2.16. Setzen wir $z = x - y$, so nimmt es die Form

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz = -m\ddot{y} \tag{3.12}$$

an. Wir setzen nun voraus, dass

$$v(t) = \dot{y}(t) = v_0 e^{-t/t_0}\Theta(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei $\Theta(t)$ die Einheitssprungfunktion (Heaviside-Funktion) bezeichnet. (Siehe Abbildung 3.3 für das Schaubild von $v(t)$.)
Wegen

$$\ddot{y}(t) = v_0 e^{-t/t_0}\delta(t) - \frac{v_0}{t_0}\, e^{-t/t_0}\,\Theta(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

bezeichnet man y auch als Geschwindigkeitproportionaler Stoß. [6]

[6] In der Signaltheorie bezeichnet „Impuls“ eine kurzzeitige Anregung, die man zumeist durch eine δ-Funktion modelliert. Deswegen finden Sie in der Literatur auch den Ausdruck „Geschwindigkeitsimpuls“. In der Physik ist jedoch Impuls = Masse mal Geschwindigkeit. Deswegen sprechen wir hier von stoßartiger (statt „impulsartiger“) Anregung.

Setzen wir damit in (3.12) ein, wobei wir $b = 0$ voraussetzen wollen, so ergibt das Duhamel-Integral

$$\begin{aligned} z(t) &= -\frac{v_0}{\omega_k} \int_0^t e^{-\tau/t_0} \left[\delta(\tau) - \frac{1}{t_0} \Theta(\tau) \right] \sin\left(\omega_k (t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{v_0}{\omega_k} \sin\left(\omega_k t\right) + \frac{v_0}{\omega_k t_0} \int_0^t e^{-\tau/t_0} \sin\left(\omega_k (t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau \,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Mittels zweimaliger partieller Integration erhalten wir für das unbestimmte Integral:

$$\begin{aligned} &\int e^{-\tau/t_0} \sin\left(\omega_k (t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau \\ &\quad = -t_0 e^{-\tau/t_0} \sin\left(\omega_k (t-\tau)\right) - t_0 \omega_k \int e^{-\tau/t_0} \cos\left(\omega_k (t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau \\ &\quad = -t_0 e^{-\tau/t_0} \sin\left(\omega_k (t-\tau)\right) + t_0^2 \omega_k e^{-\tau/t_0} \cos\left(\omega_k (t-\tau)\right) - t_0^2 \omega_k^2 \int e^{-\tau/t_0} \sin\left(\omega_k (t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

und somit

$$\int e^{-\tau/t_0} \sin\left(\omega_k (t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau = \frac{t_0}{1 + t_0^2 \omega_k^2} e^{-\tau/t_0} \left[t_0 \omega_k \cos\left(\omega_k (t-\tau)\right) - \sin\left(\omega_k (t-\tau)\right) \right].$$

Einsetzen in (3.13) liefert

$$\begin{aligned} z(t) &= -\frac{v_0}{\omega_k} \sin(\omega_k t) + \frac{v_0}{\omega_k \left(1 + t_0^2 \omega_k^2\right)} \left[t_0 \omega_k e^{-t/t_0} - t_0 \omega_k \cos(\omega_k t) + \sin(\omega_k t) \right] \\ &= \frac{v_0 t_0}{1 + t_0^2 \omega_k^2} \left[e^{-t/t_0} - \cos(\omega_k t) - t_0 \omega_k \sin(\omega_k t) \right]. \end{aligned}$$

4.4. Störung durch einen zeitlich begrenzten Stoß. Wir nehmen an, für eine Zeit τ_1 wirkt die konstante Kraft F_0. Anders gesagt, suchen wir eine Lösung x der Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

mit

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0, \\ F_0 & 0 < t \le \tau_1, \\ 0 & t > \tau_1. \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass $0 < D < 1$ (unterkritisch) und erhalten mittels Duhamel-Integral die Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t F(\tau) h_I(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \begin{cases} \frac{F_0}{m\omega_D} \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin\left(\omega_D (t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau & t \le \tau_1, \\ \frac{F_0}{m\omega_D} \int_0^{\tau_1} e^{-\delta(t-\tau)} \sin\left(\omega_D (t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau & t > \tau_1 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.14}$$

mit

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad \text{und} \quad \omega_D^2 = \omega_k^2 - \delta^2.$$

Nachdem wir in beiden Fällen dasselbe unbestimmte Integral zu lösen haben, betrachten wir es zunächst genauer. Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
&\int e^{-\delta(t-\tau)} \sin\left(\omega_D(t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau \\
&\quad = \frac{1}{\delta} e^{-\delta(t-\tau)} \sin\left(\omega_D(t-\tau)\right) + \frac{\omega_D}{\delta} \int e^{-\delta(t-\tau)} \cos\left(\omega_D(t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau \\
&\quad = \frac{1}{\delta} e^{-\delta(t-\tau)} \left[\sin\left(\omega_D(t-\tau)\right) + \frac{\omega_D}{\delta} \cos\left(\omega_D(t-\tau)\right)\right] - \frac{\omega_D^2}{\delta^2} \int e^{-\delta(t-\tau)} \sin\left(\omega_D(t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

und somit

$$\int e^{-\delta(t-\tau)} \sin\left(\omega_D(t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\omega_k^2} e^{-\delta(t-\tau)} \left[\delta \sin\left(\omega_D(t-\tau)\right) + \omega_D \cos\left(\omega_D(t-\tau)\right)\right].$$

Einsetzen in (3.14) liefert für $0 \le t \le \tau_1$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_D} \left[\frac{\omega_D}{\omega_k^2} - \frac{1}{\omega_k^2} e^{-\delta t} \left(\delta \sin(\omega_D t) + \omega_D \cos(\omega_D t)\right)\right] \\
&= \frac{F_0}{m\omega_k^2} \left[1 - e^{-\delta t} \left(\cos(\omega_D t) + \frac{\delta}{\omega_D} \sin(\omega_D t)\right)\right] \\
&= F_0 h_S(t),
\end{aligned}$$

wobei h_S die Sprungantwort in (3.2) ist.
Analog erhalten wir für $t > \tau_1$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_D} \left[\frac{e^{-\delta(t-\tau_1)}}{\omega_k^2} \left(\delta \sin\left(\omega_D(t-\tau_1)\right) + \omega_D \cos\left(\omega_D(t-\tau_1)\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{e^{-\delta t}}{\omega_k^2} \left(\delta \sin\left(\omega_D t\right) + \omega_D \cos\left(\omega_D t\right)\right)\right] \\
&= \frac{F_0}{m\omega_k^2} e^{-\delta(t-\tau_1)} \left(\cos\left(\omega_D(t-\tau_1)\right) + \frac{\delta}{\omega_D} \sin\left(\omega_D(t-\tau_1)\right)\right) \\
&\qquad - \frac{F_0}{m\omega_k^2} e^{-\delta t} \left(\cos\left(\omega_D t\right) + \frac{\delta}{\omega_D} \sin\left(\omega_D t\right)\right) \\
&= F_0 \left(h_S(t) - \frac{1}{m\omega_k^2}\right) - F_0 \left(h_S(t-\tau_1) - \frac{1}{m\omega_k^2}\right) \\
&= F_0 h_S(t) - F_0 h_S(t-\tau_1).
\end{aligned}$$

Nachdem $h_S(t-\tau_1) = 0$ für $t \le \tau_1$, erhalten wir in Summe, dass

$$x(t) = F_0 h_S(t) - F_0 h_S(t-\tau_1).$$

Das ist nicht weiter verwunderlich, weil

$$F(t) = F_0 \Theta(t) - F_0 \Theta(t-\tau_1).$$

4.5. Störung durch eine Rampenfunktion.

Beispiel 3.1. Ein Lastwagen mit Ladefläche wird als unterkritisches gedämpftes System modelliert. Die Ladefläche wird langsam mit Schutt beladen. Auf welche Höhe pendelt sich die Ladefläche ein.

Wir suchen eine Lösung x des gedämpften Systems

$$m\ddot{x}(t) \; + b\dot{x}(t) \; + \; kx(t) \; = \; p(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.15}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, wobei p die Rampenfunktion

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \le t_0, \\ (t - t_0)/(t_1 - t_0) & \text{für} \quad t_0 \le t \le t_1, \\ 1 & \text{für} \quad t \ge t_1, \end{cases}$$

darstellt.
Die Fundamentallösung eines Systems mit unterkritischer Dämpfung lautet

$$h(t) \; = \; \frac{1}{m\omega_D} \; e^{-\delta t} \sin \omega_D t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eingesetzt in das Duhamel integral erhalten wir

$$x(t) = \; \int_{-\infty}^{t} \; p(s)h(t-s)ds$$

Wie bei der Definition von p müssen wir wiederum die drei Fälle unterscheiden.

(1) $0 \le t_0$: In diesem Fall gilt $p(t) = 0$ und damit $x(t) = 0$.
(2) $t_0 \le t \le t_1$: Setzt man p in das Duhamel integral ein erhält man

$$x(t) = \; \frac{1}{m\omega_D(t_1 - t_0)} \int_{t_0}^{t} \; (s - t_0)\, e^{-\delta(t-s)} \; \sin \omega_D(t-s)\, ds$$

Mit Hilfe von Mathematica oder Maple erhält man

$$\begin{aligned} x(t) \; &= \; \frac{1}{m\omega_D(t_1 - t_0)} \frac{1}{(\delta^2 + \omega_D^2)^2} \\ &\quad \Big\{ \omega_D \left[\delta^2(t - t_0) - 2\delta + \omega_D^2(t - t_0) \right] \\ &\qquad + e^{-\delta(t-t_0)} \left[2\delta\omega_D \cos(\omega_D(t_0 - t)) + (\omega_D^2 - \delta^2) \sin(\omega_D(t_0 - t)) \right] \Big\} \end{aligned}$$

(3) $t \ge t_1$: Setzt man p in das Duhamel integral ein erhält man

$$\begin{aligned} x(t) \; &= \; \frac{1}{m\omega_D(t_1 - t_0)} \int_{t_0}^{t_1} (s - t_0)\, e^{-\delta(t-s)} \; \sin \omega_D(t-s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{m\omega_D} \int_{t_1}^{t} e^{-\delta(t-s)} \; \sin(\omega_D(t-s))\, ds. \end{aligned}$$

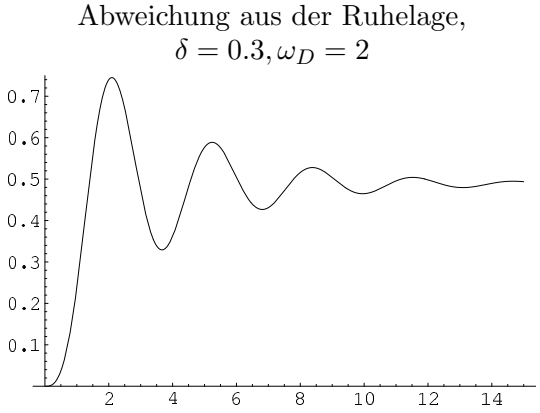


ABBILDUNG 3.4. Anregung durch eine Rampenfunktion

Mit Hilfe von Mathematica oder Maple erhält man

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m\omega_D(t_1-t_0)}\frac{1}{(\delta^2+\omega_D^2)^2} \\ &\quad \Big\{e^{-\delta(t-t_1)}\omega_D\left[\delta^2(t_1-t_0)-2\delta+\omega_D^2(t_1-t_0)\right]\cos(\omega_D(t_1-t)) \\ &\quad + e^{-\delta(t-t_0)}\left[2\delta\omega_D\cos(\omega_D(t_0-t))+(\omega_D^2-\delta^2)\sin(\omega_D(t_0-t))\right]+ \\ &\quad + e^{-\delta(t-t_1)}\left[\delta^2-\omega_D^2+\delta^3(t_0-t_1)+\delta\omega_D^2(t_0-t_1)\right]\sin(\omega_D(t_1-t))\Big\} \\ &+ \frac{1}{m\omega_D}\frac{1}{(\delta^2+\omega_D^2)^2} \\ &\quad \Big\{\omega_D + e^{-\delta(t-t_1)}\left[\delta\sin(\omega_D(t_1-t))-\omega_D\cos(\omega_D(t_1-t))\right]\Big\} \end{aligned}$$

5. Erregung durch periodische Funktionen

5.1. Erregung durch Stöße in regelmäßigen Abständen. Die stationäre Lösung einer Differentialgleichung ist aus der Duhamel-Integral-Darstellung kaum ersichtlich. Deswegen wendet man andere Methoden an, um stationäre Lösungen zu untersuchen. In diesem Beispiel wird exemplarisch die stationäre Lösung eines durch Stöße in regelmäßigen Abständen angeregten Systems untersucht.
Ein ungedämpftes System werde durch jeweils gleiche Stöße (Impulse) in Abständen τ_0 erregt, siehe Abb.3.5, wobei $\omega_k\tau_0 \neq n\pi$ sein soll. Wie lautet die stationäre Lösung?
Es sei also

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = p(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$p(t) = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

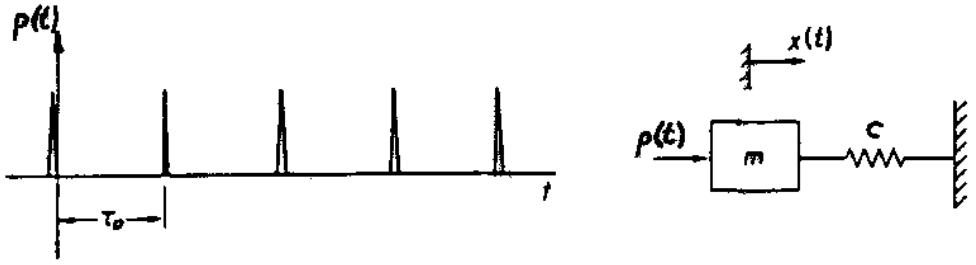


Abbildung 3.5.

Sind wir nur an der stationären Lösung interessiert, so arbeiten wir mit sogenannter verschwundenen Dämpfung[7]und haben nur eine (periodische) partikuläre Lösung zu suchen. Dazu beachten wir, dass zwischen den einzelnen Stößen das System frei schwingt. Die stationäre Lösung zwischen $j\tau_0$ und $(j+1)\tau_0$ muss also von der Form

$$x(t) = A\sin(\omega_k(t - j\tau_0) + \varphi) \qquad (j\tau_0 \le t < (j+1)\tau_0)$$

sein, wobei A und φ unbekannt sind. Wegen $x(j\tau_0) = x((j+1)\tau_0)$ ergibt sich daraus

$$A\sin\varphi = A\sin(\omega_k\tau_0 + \varphi). \tag{3.16}$$

Beachten wir nun, dass ein Kraftstoß von der Intensität p_0 sofort einen entsprechenden Impuls (im physikalischen Sinn, Kraft mal Zeit = Impulsänderung) überträgt, so muss der Geschwindigkeitszuwachs v_0 zu den Zeiten $k\tau_0$ der Bedingung

$$p_0 \;=\; mv_0$$

genügen. Damit ist aber

$$\dot{x}(t-0) \;+ v_0 \;=\; \dot{x}(t+0), \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei $v_0 \;=\; p_0/m$ ist und

$$\dot{x}(t \pm 0) = \lim_{h \to \pm 0} \dot{x}(t+h).$$

Wegen

$$\dot{x}(t) = A\omega_k \cos(\omega_k(t - j\tau_0) + \varphi), (j\tau_0 \le t < (j+1)\tau_0),$$

erhalten wir für $t = (j+1)\tau_0$

$$A\omega_k\cos(\omega_k\tau_0 + \varphi) \;+\; p_0/m \;=\; A\omega_k\cos\varphi. \tag{3.17}$$

Formen wir (3.16) und (3.17) um, so erhalten wir

$$\sin(\omega_k\tau_0 + \varphi) \;-\; \sin\varphi = 0$$

[7]In jedem realen System klingen freie Schwingungen irgendwann einmal ab. Wir rechnen zwar (weil es einfacher ist) mit einem völlig ungedämpften System, nehmen aber trotzdem an, dass freien Schwingungen (die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung) abgeklungen sind

$$\cos(\omega\tau_0 + \varphi) \quad - \quad \cos\varphi = -\frac{p_0}{Am\omega_k}.$$

Diese Gleichungen können wir auch in der Form

$$\sin\frac{\omega_k\tau_0}{2}\cos\left(\frac{\omega_k\tau_0}{2}+\varphi\right) \quad = \quad 0 \tag{3.18}$$

$$\sin\frac{\omega_k\tau_0}{2}\sin\left(\frac{\omega_k\tau_0}{2}+\varphi\right) \quad = \quad \frac{p_0}{2Am\omega_k} \tag{3.19}$$

schreiben. Wegen $\omega_k\tau_0 \neq n\pi$ ist $\sin\omega_k\tau_0 \neq 0$, also

$$\cos\left(\frac{\omega_k\tau_0}{2}+\varphi\right) = 0,$$

und damit

$$\sin\left(\frac{\omega_k\tau_0}{2}+\varphi\right) = \pm 1.$$

Es sei $0 < \frac{\omega_k\tau_0}{2} < \pi$. Wenn das Vorzeichen von A positiv sein soll, müssen wir

$$\sin\left(\frac{\omega_k\tau_0}{2}+\varphi\right) = 1 \quad \text{und} \quad A = \frac{p_0}{2m\omega_k\sin(\omega_k\tau_0/2)}$$

wählen. Der maximale Vergrößerungsfaktor

$$V_{max} = x(t)_{max}c/p_0$$

wird dadurch

$$V_{max} = \frac{p_0}{2m\omega_k\sin(\omega_k\tau_0/2)}\cdot\frac{k}{p_0} = \frac{\omega_k}{2}\frac{1}{\sin(\omega_k\tau_0/2)}$$

Da $\sin(\omega_k\tau_0/2)$ beliebig klein sein kann, ist V_{max} also unbeschränkt.

6. Übertragungsfunktion

Die Funktion $H(\omega)$ aus Gleichung 2.5 beschreibt den Zusammenhang zwischen Erregerkraft $F(t)$ und Auslenkung $x(t)$ bei einer Frequenz ω. Anders gesagt, eine Erregung mit Frequenz ω wirkt sich multipliziert mit $H(\omega)$ auf das Ergebnis aus. Man nennt $H(\omega)$ daher die *Frequenzübertragungsfunktion*, oder auch nur *Übertragungsfunktion*.
Ein wichtiges Resultat dieses Kapitels wird sein: $H(\omega)$ ist die Fouriertransformierte der Fundamentallösung $h(x)$.[8]

6.1. Fourierreihe, periodische Erregerkräfte. Gegeben sei wieder die Schwingungsgleichung[9]

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.20}$$

wobei f eine periodische Funktion der Periode $T > 0$ sei (d.h. $f(t) = f(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$).

[8]In der Systemtheorie wird die übertragungsfunktion $H(s)$ als Laplacetransformierte der Fundamentallösung $h(x)$ definiert; für $s = i\omega$ ergibt sich die von uns verwendete Funktion $H(\omega)$.
[9]Schon wieder ein Notationsproblem mit dem Kraftterm auf der rechten Seite! Eigentlich sollte F als Symbol für Kraft stehen, aber in diesem Abschnitt bezeichnen Großbuchstaben Fouriertransformierte. Deswegen steht hier $f(t)$ für den Kraftterm.

6.1.1. *Komplexe Form der Fourierreihe.*

Setzen wir für $n \in \mathbb{Z}$ und $\omega = 2\pi/T$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\ e^{-in\omega t} dt,$$

so hat f die Fourierreihendarstellung

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

6.1.2. *Sinus-Cosinus-Form der Fourierreihe.*

Eine alternative Fourierreihen-Darstellung ist die Sinus-Cosinus-Form:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \tag{3.22}$$

mit

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\ dt, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\ dt$$

Die Formel für a_n gilt auch für a_0 und vereinfacht sich in diesem Fall auf

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \qquad \text{oder, äquivalent,} \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Interpretation: $a_0/2$ ist der *Mittelwert* der Funktion f über eine Periode.

Vorteil dieser Form: reelle Darstellung, Sinus und Cosinus sind vertrauter als die komplexe Exponentialfunktion. Nachteil: umständlichere und uneinheitliche Definition der Fourierreihe und der Koeffizienten a_0, a_n, b_n.
Die Sinus-Cosinus-Form (3.22) ist völlig äquivalent zur komplexen Form (3.21); über die EULERschen Formeln lassen sich die Darstellungen ineinander umrechnen.

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & \text{für } n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

Anmerkungen. In den Definitionen von a_n, b_n, c_n ist über *eine volle Periode* zu integrieren. Ob von 0 bis T, von $-T/2$ bis $T/2$ oder auch von 0,815 bis $0{,}815 + T$ ist egal. Die passende Wahl des Integrationsbereiches vereinfacht oft die Berechnung.

Gerade/ungerade Funktion. Gilt für eine Funktion $f(-x) = f(x)$ (*gerade* Funktion, Graph spiegelsymmetrisch um die y-Achse), dann sind alle $b_n = 0$.
Gilt für eine Funktion $f(-x) = -f(x)$ (*ungerade* Funktion, Graph punktsymmetrisch um den Ursprung), dann sind alle $a_n = 0$.

(Begründung: Wählen Sie $-T/2$ bis $T/2$ als Integrationsbereich und spalten Sie das Integral in zwei Summanden: Integral von $-T/2$ bis 0 und Integral von 0 bis $T/2$. Je nach Funktionstyp heben sich die beiden Summanden auf.)

6.1.3. *Lösungsweg.* Die Erregerkraft lässt sich als Summe von Termen darstellen; wir lösen für jeden Term und summieren die einzelnen Lösungen. Wesentliche Voraussetzung für diese Vorgangsweise ist die Linearität des Problems.
Wir haben also lauter einzelne Gleichungen der Gestalt

$$m\ddot{x}_n(t) + b\dot{x}_n(t) + kx_n(t) = c_n e^{in\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

zu lösen – je ein $x_n(t)$ pro Fourier-Term. Die Dauerlösungen dieser Gleichung sind uns aber schon bekannt, siehe Gleichung (2.5):

$$x_n(t) = \frac{c_n}{k} H(n\omega) e^{in\omega t} \qquad \text{mit} \qquad H(n\omega) = \frac{1}{-\frac{m}{k}(n\omega)^2 + \frac{ib}{k} n\omega + 1} \quad .$$

Ist $n\omega \neq \omega_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so lässt sich bei $D = 0$, oder näherungsweise bei kleinem D, auch die einfachere Dauerlösung im ungedämpften Fall verwenden:

$$x_n(t) = \frac{c_n}{k} \frac{1}{1 - (n\omega/\omega_k)^2} e^{in\omega t}$$

Insgesamt hat also die Dauerlösung von (3.20) die Form

$$\begin{aligned} &\text{Erregerterm} && f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \\ &\text{Lösung} && x(t) = \frac{1}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n\omega) e^{in\omega t}. \end{aligned}$$

Interpretation: Ein Fourierterm mit Amplitude c_n im Erregerterm ergibt, multipliziert mit $H(n\omega)/k$, einen entsprechender Fourierterm. Die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ beschreibt also den einen einfachen multiplikativen Zusammenhang zwischen Systemerregung und Systemantwort im Frequenzraum.
Die Sinus-Cosinus-Version dieser Darstellung ist weit weniger elegant:

$$\begin{aligned} &\text{Erregerterm} && f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t), \\ &\text{Lösung} && x(t) = \frac{a_0}{2k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} V(n\omega)\big(a_n \cos(n\omega t - \varphi_n) + b_n \sin(n\omega t - \varphi_n)\big). \end{aligned}$$

Hier ist $V(n\omega)$ der Betrag $|H(n\omega)|$ und φ_n der entsprechende Phasenwinkel:

$$V(n\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{m}{k}(n\omega)^2)^2 + \frac{b^2}{k^2}(n\omega)^2}} \quad \text{und} \quad \tan\varphi_n = \frac{\frac{b}{k}(n\omega)}{1 - \frac{m}{k}(n\omega)^2}.$$

Einfacher und übersichtlicher sind die Formeln in dimensionsloser Form, mit $\omega = \eta\omega_k$, vergleiche 2.8 und 2.9:

$$V(n\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2\eta^2)^2 + (2Dn\eta)^2}} \quad \text{und} \quad \tan\varphi_n = \frac{-2Dn\eta}{1-n^2\eta^2}.$$

6.2. Nicht periodische Erregerkräfte. Wir haben es anfangs schon angekündigt: $H(\omega)$ ist (bis auf Skalierung mit k) die Fouriertransformierte der Fundamentallösung $h(x)$. Das wollen wir nun nachrechnen.
Dazu wenden wir den *Faltungssatz* für Fouriertransformationen an. Dazu rufen wir in Erinnerung, dass die FOURIERTRANSFORMIERTE $\mathcal{F}\{x\}$ durch das Integral

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \mathcal{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

definiert ist. Existiert die Funktion $\mathcal{X}$, so ist x unter recht allgemeinen Bedingungen durch das Integral

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

darstellbar.
Beispiel B.8 sagt, dass $\mathcal{F}\{\delta\} = 1$ (über den Distributionen) ist. Dann erhalten wir mit den Rechenregeln in Abschnitt B.3.2

$$\begin{aligned}
1 = \mathcal{F}\{\delta\}(\omega) &= \\
&= \mathcal{F}\left\{m\ddot{h}(t) + b\dot{h}(t) + kh(t)\right\}(\omega) = \\
&= m\mathcal{F}\left\{\ddot{h}\right\}(\omega) + b\mathcal{F}\left\{\dot{h}\right\}(\omega) + k\mathcal{F}\{h\}(\omega) \\
&= m(i\omega)^2\mathcal{F}\{h\}(\omega) + bi\omega\mathcal{F}\{h\}(\omega) + k\mathcal{F}\{h\}(\omega) \\
&= (-m\omega^2 + i\omega b + k)\mathcal{F}\{h\}(\omega),
\end{aligned}$$

und daher

$$\mathcal{F}\{h\}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega b + k} = \mathcal{H}(\omega)\ , \tag{3.24}$$

das ist bis auf einen Faktor $1/k$ die in Gleichung 2.6 definierte Funktion $H(\omega)$.

Dimensionsbetrachtungen. Die Fundamentallösung $h(x)$ hat Dimension Zeit/Masse, erst multipliziert mit dem übertragenen Impuls (Dimension Masse·Länge/Zeit) ergibt sich die Dimension Länge, entsprechend einer Weg-Auslenkung.
Fouriertransformation, also Integration über die Zeit, multipliziert dimensionsmäßig mit Zeit, also hat $\mathcal{H}(\omega)$ als Fouriertransformierte von $h(x)$ Dimension Zeit^2/Masse. Das stimmt so in Gleichung 3.24, alle Terme im Nenner haben Dimension Masse/Zeit^2.

Die inverse Fouriertransformation integriert über den Frequenzbereich, dividiert also dimensionsmäßig durch Zeit. Damit heben sich Transformation und inverse Transformation auch dimensionsmäßig auf, wie es sein soll.
In Kapitel 2 ist hingegen $H(\omega)$ als der dimensionslose Verstärkungsfaktor definiert.
Wir müssen mit unterschiedlichen Konventionen in unterschiedlichen Gebieten zurechtkommen. Verstärkungsfaktoren bei harmonischer Erregung sind sinnvoller Weise dimensionslos definiert. Bei Fouriertransformationen hat aber praktisch jedes Fachgebiet, jedes Lehrbuch unterschiedliche Konventionen, was die Skalierungskonstanten betrifft.
Um die Fouriertransformierte $\mathcal{X}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, der Lösung $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, der Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

zu berechnen, genügt es also die Fouriertransformierte von f mit der Funktion $\mathcal{H}$ punktweise zu multiplizieren:

$$\mathcal{X}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)\mathcal{F}\{f\}(\omega).$$

Wenigstens hier sind wir dimensionsmäßig konsistent: $\mathcal{F}\{f\}$ als Fouriertransformierte einer Kraft hat Dimension Kraft·Zeit. Multipliziert mit $\mathcal{H}(\omega)$ gibt das Dimension Länge·Zeit, korrekt für die Fouriertransformierte einer Länge. Wir werden diese Darstellung von $\mathcal{X}$ später sehr nützlich finden.

Testfragen

(1) (Orientieren Sie sich am Beispiel in Abschnitt 4.1):
   (a) Stellen Sie für die Erregerkraft

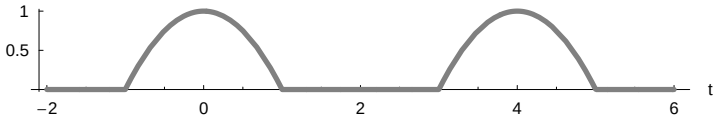
$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

   die Lösung der Schwingungsgleichung im ungedämpften Fall als Duhamelintegral dar.
   (b) Werten Sie das Integral aus und geben Sie $x(t)$ an. Zur Unterstützung ein unbestimmtes Integral:

$$\int e^{-s} \sin(as) ds = -\frac{e^{-s}(\sin(as) + a\cos(as))}{a^2 + 1}$$

   (c) Finden Sie eine partikuläre Lösung der Schwingungsgleichung.
   (d) Stellen Sie x in der Form $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ dar und bestimmen Sie die Konstanten in der Lösung x_h so, dass $x(t)$ die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

(2) Unebenheiten einer Oberfläche erzeugen ein Signal $f(t)$, das durch eine periodische Funktion modelliert wird. (Zahlenwert-Beispiel mit dimensionslosen Einheiten.)



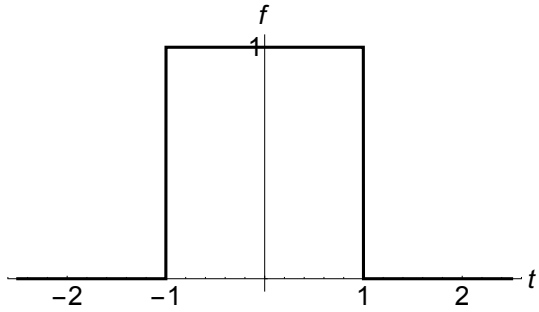
Die Periode beträgt $T = 4$, für $-1 < t < 1$ ist $f(t) = 1 - t^2$, für $1 < t < 3$ ist $f(t) = 0$.
   (a) Berechnen Sie den konstanten Term in der Fourier-Reihenentwicklung der Erregerkraft.
   (b) Berechnen Sie auch die Terme für $n = 1$ und $n = 2$ in der Fourier-Reihenentwicklung der Erregerkraft. Zur Unterstützung hier einige bestimmte Integrale:

$$\int_0^1 (1-t^2)\sin(\pi t)\, dt = \frac{4+\pi^2}{\pi^3} \qquad \int_0^1 (1-t^2)\cos(\pi t)\, dt = \frac{2}{\pi^2} \qquad \int_0^1 (1-t^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \frac{16}{\pi^3}$$

   (c) Berechnen Sie für die oben erhaltenen Terme der Reihenentwicklung entsprechende partikuläre Lösungen der Schwingungsgleichung $\ddot{x} + 4x = f(t)$

(3) Gegeben sei der Rechtecks-Impuls $f(t)$ (Zahlenwert-Beispiel, dimensionslosen Einheiten)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



   (a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $F(\omega)$

(b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ der entsprechenden Lösung der Schwingungsgleichung $\ddot{x} + 4x = f(t)$

KAPITEL 4

Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

1. Systeme mit zwei Freiheitsgraden

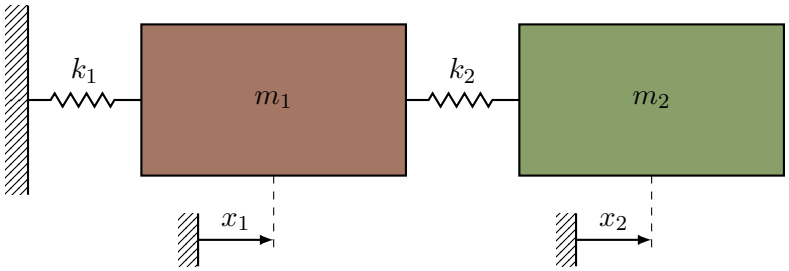


Abbildung 4.1. Feder-Masse-System mit zwei Freiheitsgraden

Das in Abbildung 4.1 skizzierte System hat zwei Freiheitsgrade. Die dazugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1\,\ddot{x}_1 + (k_2 + k_1)\,x_1 - k_2 x_2 = 0 \tag{4.1}$$

$$m_2\,\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \tag{4.2}$$

Wir können sie auch in der Form

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

schreiben. Setzen wir

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

(dabei ist M die Massenmatrix und K die Steifigkeitsmatrix) und

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir die Darstellung

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0,$$

was sehr an die Gleichung

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

erinnert. Analog zum eindimensionalen Fall können wir den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}e^{\lambda t} \tag{4.3}$$

versuchen, worin der Vektor $\mathbf{x}(t)$ die beiden Lösungen $x_1(t), x_2(t)$ zusammenfasst und der Vektor $\mathbf{a}$ die beiden Amplituden enthält. Also

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda t} \\ a_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \mathbf{a} e^{\lambda t}.$$

Da wir auch schon wissen, dass sich für λ in einem ungedämpften System ein rein imaginärer Wert ergibt, beginnen wir gleich mit $\lambda = i\omega$, setzen also an

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} e^{i\omega t}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= i\omega \mathbf{a} e^{i\omega t} \\ \ddot{\mathbf{x}} &= -\omega^2 \mathbf{a} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

und somit

$$-\omega^2 M \mathbf{a} e^{i\omega t} + K \mathbf{a} e^{i\omega t} = 0,$$

was nur gelten kann, wenn

$$(-\omega^2 M + K)\,\mathbf{a} = 0, \tag{4.4}$$

wobei wir an einem nichttrivialen Lösungsvektor $\mathbf{a}$ interessiert sind. Das ist nur möglich, wenn die Systemdeterminante Null ist, also wenn

$$\det(K - \omega^2 M) = 0.$$

Das heißt

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0\ . \tag{4.5}$$

Daraus ergibt sich eine quadratische Gleichung für ω^2. Sind $\pm\omega_1$ und $\pm\omega_2$ die Lösungen dieser Gleichung, dann können wir einen nichttrivialen Amplituden-Vektor $\mathbf{a}$ als Lösung von

$$(-\omega_1^2 M + K)\,\mathbf{a} = 0$$

finden. Und es gibt einen zweiten nichttrivialen Amplituden-Vektor $\mathbf{b}$, der zur zweiten ω-Lösung gehört:

$$(-\omega_2^2 M + K)\,\mathbf{b} = 0$$

Dann sind

$$\mathbf{a}\, e^{i\,\omega_1\, t} = \mathbf{a}\,(\cos\omega_1\, t + i\, \sin\omega_1\, t)$$

und

$$\mathbf{a}\, e^{-i\,\omega_1\, t} = \mathbf{a}\,(\cos\omega_1\, t - i\, \sin\omega_1\, t)$$

Lösungen, und auch

$$\mathbf{a}\, \cos\omega_1\, t \quad \text{und} \quad \mathbf{a}\, \sin\omega_1\, t,$$

sowie jede Linearkombination der Form

$$(A_1 \sin\omega_1\, t + B_1\, \cos\omega_1\, t)\,\mathbf{a}.$$

Analog erhalten wir die Lösungen

$$\mathbf{b}\, \cos\omega_2\, t, \quad \mathbf{b}\, \sin\omega_2\, t$$

mit den Linearkombinationen

$$(A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t)\, \mathbf{b}.$$

Die allgemeine Lösung $x(t)$ hat dann die Darstellung

$$\mathbf{x}(t) = (A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t))\, \mathbf{a} + (A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t))\, \mathbf{b}.$$

Dieses Resultat können wir auch in der Form

$$\mathbf{x}(t) = k_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)\, \mathbf{a} + k_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\, \mathbf{b}$$

schreiben. Spezielle Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t).$$

In beiden Fällen schwingen m_1 und m_2 mit der gleichen Frequenz und erreichen gleichzeitig ihre Extremwerte, haben jedoch verschiedene Amplituden. Ist $\omega_1 < \omega_2$, so kann man zeigen, dass a_1 und a_2 das gleiche Vorzeichen haben, b_1 und b_2 jedoch verschiedene. Man nennt $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die sogenannten EIGENSCHWINGUNGSFORMEN. Jede Lösung setzt sich aus diesen Lösungen durch Phasenverschiebung und/oder Superposition zusammen. Man nennt ω_1 und ω_2 die EIGENFREQUENZEN des Systems und $\mathbf{a} \cos \omega_1 t$, $\mathbf{a} \sin \omega_1 t$, $\mathbf{b} \cos \omega_2 t$, $\mathbf{b} \sin \omega_2 t$ Grund- oder Basislösungen.
Analog geht man vor, wenn es sich nicht um 2 sondern um n Massen handelt. Dann betrachten keine 2×2 Matrizen, sondern $n \times n$ Matrizen.
Zur Illustration rechnen wir ein Beispiel mit speziellen Werten durch. Es sei $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, und $k_1 = k_2 = k$. Die Gleichung (4.5) nimmt dann die Form

$$2\omega^4 - 5\frac{k}{m}\omega^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

an. Die Wurzeln der Gleichung sind

$$\omega_1^2 = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}\right)\frac{k}{m} = 0.2192\frac{k}{m}$$

und

$$\omega_2^2 = \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}\right)\frac{k}{m} = 2.2808\frac{k}{m}.$$

Die Eigenfrequenzen unseres Systems sind somit

$$\omega_1 = \sqrt{0.2192}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

und

$$\omega_2 = \sqrt{2.2808}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Setzen wir in (4.4) ein, so ergibt das für $\omega^2 = 0.2192\, k/m$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{2k - \omega_1^2 m} = \frac{1}{2 - 0.219} = 0.5616,$$

während für ω_2^2 das Verhältnis

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{k}{2k - \omega_2^2 m} = \frac{1}{2 - 2.280} = -3.5616$$

herauskommt. Beachten wir, dass (4.4) für invertierbares M auch in der Form

$$M^{-1} K \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}$$

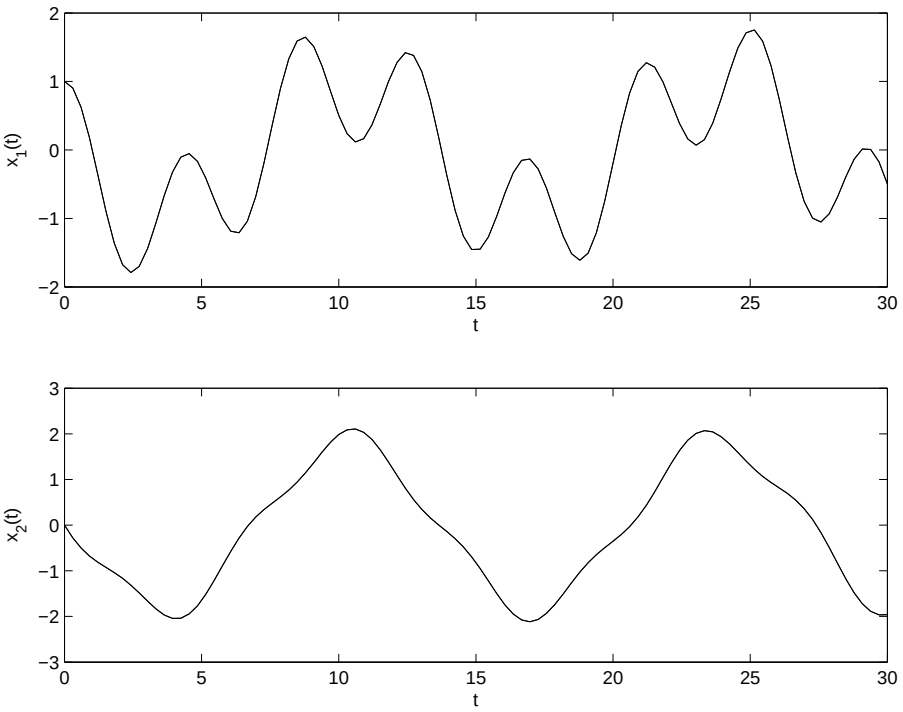
geschrieben werden kann, so sieht man, dass $\mathbf{a}$ ein Eigenvektor der Matrix $M^{-1}C$ zum Eigenwert ω^2 ist. Damit ist $\mathbf{a}$ nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmbar.
Setzen wir $a_2 = b_2 = 1$ (Da es nur auf die Verhältnisse a_1/a_2 und b_1/b_2 ankommt, bietet es sich an, jeweils den Nenner gleich 1 zu wählen), so erhalten wir die Basislösungen

$$\begin{pmatrix} 0{,}5616 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm i\omega_1 t} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -3.562 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm i\omega_2 t}.$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0)$ und $\dot{\mathbf{x}}(0)$ kann man dann aus

$$\mathbf{x}(t) = (A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t))\, \mathbf{a} + (A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t))\, \mathbf{b}$$

die Konstanten A_1, A_2, B_1, und B_2 bestimmen. Ist etwa $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ und $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = -1$ so erhalten wir die hier dargestellte Lösung.



Testaufgaben.

AUFGABE 4.1.
Frischen Sie, falls nötig, Ihre Mathematik-I-Kentnisse auf!

(1) Geben Sie (ohne langes Rechnen) eine Lösung des folgenden Systems an.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) Berechnen Sie die Determinante des obigen Systems und begründen Sie, warum das Gleichungssystem eindeutig oder nicht eindeutig lösbar ist.

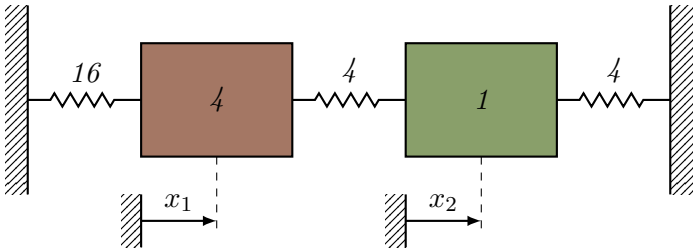
(3) Geben Sie eine nicht triviale Lösung des obigen Systems an.

(4) Der Nullvektor ist in allen folgenden Gleichungssystemen eine Lösung. Gibt es auch andere Lösungen? Falls ja, geben Sie eine an.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *hat keine weitere Lösung / hat eine Lösung:* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *hat keine weitere Lösung / hat eine Lösung:* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

AUFGABE 4.2. *Gegeben sei ein ungedämpftes Feder-Masse-System mit zwei Freiheitsgraden:*

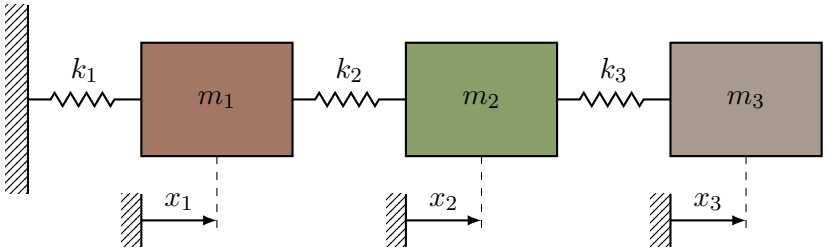


(1) Schreiben Sie die zwei Differentialgleichungen für die Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der beiden Massen an. an.
(2) Geben Sie Massen- und Steifigkeitsmatrix an und schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform an.
(3) Berechnen Sie aus der Bedingung $\det\left(K-\omega^2 M\right)=0$ die Eigenfrequenzen dieses Systems.
(4) Finden Sie für $\omega=3$ einen nichttrivialen Lösungsvektor $\mathbf{a}$ des Gleichungssystems

$$\left(K-\omega^2 M\right)\mathbf{a}=0\ .$$

(5) Skizzieren Sie in einem Zeit-Weg-Diagramm für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ eine mögliche Schwingungsform für $\omega=3$.

AUFGABE 4.3. *Man ergänze das Gleichungssystem (4.1, 4.2) um eine dritte Gleichung entsprechend der folgenden Skizze:*



Man bestimme

(1) Die Bewegungsgleichungen
(2) Die Massen- und Steifigkeitsmatrix des Systems
(3) Die Eigenfrequenzen für $m_1=m_2=m_3=1,\ k_1=6,\ k_2=5,\ k_3=3$.

2. Massen-, Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix

Wir betrachten allgemein ein System mit n Freiheitsgraden, in dem die Kräfte $\mathbf{F}$ und Auslenkungen $\mathbf{x}$ auftreten:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Wenn die Kräfte *linear* von den Auslenkungen abhängen, dann lässt sich das Kraftgesetz in der Form

$$\mathbf{F} = K\mathbf{x} \tag{4.6}$$

mit einer $n \times n$-Matrix K schreiben. (Das ist eine mathematische Tatsache: jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hat die Form $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ mit einer $n \times n$-Matrix A.)
Die Bewegungsgleichungen eines solchen Systems haben die Form

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0 \tag{4.7}$$

Im Kraftgesetz (4.6) und den Bewegungsgleichungen (4.7) ist $M = [m_{ij}]$ die Massenmatrix[1] und $K = [k_{ij}]$ die Steifigkeitsmatrix.

> In der Steifigkeitsmatrix $K = [k_{ij}]$ gibt der Eintrag k_{ij} an, welche Kraft auf Komponente i wirkt, wenn die Komponente j um eine Einheit ausgelenkt ist und alle anderen Auslenkungen Null sind.

Die Steifigkeitsmatrix ist *symmetrisch*: $k_{ij} = k_{ji}$. Die auf Komponente i wirkende Kraft infolge einer Einheits-Auslenkung von Komponente j ist gleich der Kraft auf Komponente j infolge einer Einheits-Auslenkung von Komponente i.
An einem Feder-Masse-System wie zum Beispiel dem auf Seite 85 lässt sich diese Symmetrie-Eigenschaft direkt überprüfen; allgemein folgt sie immer dann (sogar bei nichtlinearen Kraftgesetzen), wenn die Kräfte von einem Potential herrühren.
Das Kraftgesetz (4.6) erlaubt, die Kräfte $\mathbf{F}$ bei gegebenen Auslenkungen $\mathbf{x}$ direkt zu berechnen. Sind umgekehrt die wirkenden Kräfte gegeben und die Auslenkungen gesucht, dann lässt sich (4.6) als lineares Gleichungssystem für den unbekannten Vektor $\mathbf{x}$ bei gegebener rechter Seite $\mathbf{F}$ auffassen:

$$K\mathbf{x} = \mathbf{F} \ .$$

Sofern $\det K \neq 0$, lässt sich das Gleichungssystem durch Elimination lösen. Die zu K inverse Matrix $A = K^{-1}$ heißt Nachgiebigkeitsmatrix. Mit ihr lässt sich schreiben:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{F} \tag{4.8}$$

> In der Nachgiebigkeitsmatrix $A = [\alpha_{ij}]$ gibt der Eintrag α_{ij} die Auslenkung der Komponente i an, wenn auf Komponente j die Kraft eins wirkt und alle anderen Kräfte null sind.

[1] Bei den hier behandelten Beispielen einfacher Feder-Masse-Systeme ist die Massenmatrix immer eine Diagonalmatrix. Das ist in allgemeineren Systemen nicht immer der Fall!

Die Nachgiebigkeitsmatrix ist, ebenso wie die Steifigkeitsmatrix, *symmetrisch*: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Die Auslenkung von Komponente i infolge einer Einheits-Kraft auf Komponente j ist gleich der Auslenkung der Komponente j infolge einer Einheits-Kraft auf Komponente i.
Mathematisch folgt die Symmetrie von A aus der Symmetrie von K. Es gilt allgemein: ist eine Matrix symmetrisch, so ist es auch (falls sie existiert) ihre Inverse.

Potentielle und kinetische Energie, Rayleigh-Quotient.

Für ein Kraftgesetz $\mathbf{F} = K\mathbf{x}$ ist die potentielle Energie (in den Federn gespeicherte Arbeit) gleich

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T K\mathbf{x}$$

Sind die Trägheitskräfte durch $M\ddot{\mathbf{x}}$ gegeben, dann ist die kinetische Energie gleich

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T M\dot{\mathbf{x}}$$

Falls $\mathbf{x}(t)$ harmonisch schwingt, also zum Beispiel $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\sin(\omega t)$, dann erreicht das System die *maximale* potentielle Energie, wenn alle Komponenten maximal ausgelenkt und alle Geschwindigkeiten null sind. Die Auslenkungen $\mathbf{x}$ sind dann gleich dem Amplituden-Vektor $\mathbf{a}$ und

$$E_{\text{pot, max}} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T K\mathbf{a}\ .$$

Die kinetische Energie ist zu diesem Zeitpunkt gleich null.
Die kinetische Energie des Systems ist maximal, wenn die Komponenten durch die Ruhelage schwingen. Die Geschwindigkeiten sind $\dot{\mathbf{x}}(t) = \omega\mathbf{a}\cos(\omega t)$, maximal $\omega\mathbf{a}$. Daher ist

$$E_{\text{kin, max}} = \omega^2\frac{1}{2}\mathbf{a}^T M\mathbf{a}\ .$$

Die potentielle Energie ist zu diesem Zeitpunkt gleich null.
In einem System mit Bewegungsgleichung $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0$ bleibt die Gesamtenergie konstant. Es muss daher gelten

$$\begin{aligned} E_{\text{kin, max}} &= E_{\text{pot, max}} \\ \omega^2\frac{1}{2}\mathbf{a}^T M\mathbf{a} &= \frac{1}{2}\mathbf{a}^T K\mathbf{a} \\ \omega^2 &= \frac{\mathbf{a}^T K\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T M\mathbf{a}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Der Quotient auf der rechten Seite in (4.9) heißt RAYLEIGH-QUOTIENT.

Eigenwert-Problem und Rayleigh-Quotient. Wir haben angenommen, dass $\mathbf{a}$ Amplitudenvektor einer harmonischen Schwingung ist. Dann muss $\mathbf{a}$ die Gleichung

$$K\mathbf{a} = \omega^2 M\mathbf{a} \tag{4.10}$$

erfüllen, siehe Gleichung (4.4).

Die Aufgabe, eine nichttriviale Lösung des Systems (4.10) zu finden, ist ein EIGENWERTPROBLEM; einen Vektor $\mathbf{a} \neq 0$ bezeichnet man als EIGENVEKTOR, den entsprechenden Wert ω^2 als EIGENWERT des Systems (4.10)[2].
Die Brauchbarkeit des Rayleighquotienten (4.9) für numerische Berechnungen liegt darin, dass er sich auch für Vektoren $\mathbf{a}$, die nicht Eigenvektoren sind, berechnen lässt. Die berechneten Werte sind dann nicht unbedingt Eigenfrequenzen, aber es gilt:

Das Minimum des Rayleighquotienten liefert die Grundfrequenz (die niedrigste Eigenfrequenz) des Systems.

$$\omega_1^2 = \min_{\mathbf{a}} \frac{\mathbf{a}^T K \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T M \mathbf{a}} \tag{4.11}$$

Das Minimum wird erreicht, wenn $\mathbf{a}$ der Grundschwingung des Systems, also einem Eigenvektor zur niedrigster Frequenz ω_1, entspricht. Wählt man einen Vektor $\mathbf{a}$, der zwar nicht exakt, aber doch annähernd die Grundschwingung beschreibt, dann erhält man eine gute Abschätzung der Grundfrequenz ω_1; um so genauer, je besser $\mathbf{a}$ der Eigenschwingungsform entspricht.

$$\omega_1^2 \leq \frac{\mathbf{a}^T K \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T M \mathbf{a}} \tag{4.12}$$

Testaufgaben.

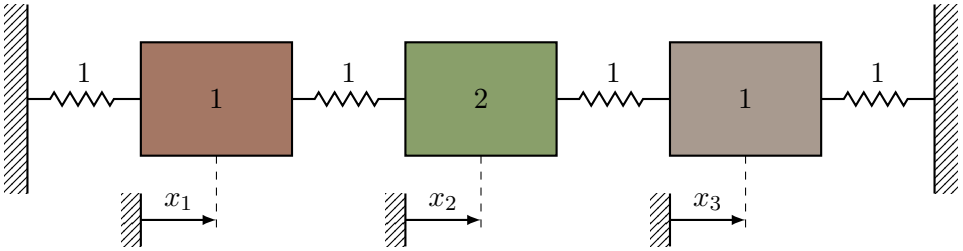
AUFGABE 4.4. *Gegeben sind Massen- und Steifigkeitsmatrix:*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) Wie lauten die kritischen Frequenzen?
(2) Wenn die Komponenten um $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ *ausgelenkt sind, wie groß sind die entsprechenden Kräfte?*
(3) Welche Energie ist für diese Auslenkung in den Federn gespeichert?
(4) Berechnen Sie mit dem Vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ *den Rayleigh-Quotienten und schätzen Sie die Grundfrequenz ab.*
(5) Wenn an Komponente 2 die Kraft 1 und an Komponente 1 keine Kraft wirkt, wie gross sind die Auslenkungen der beiden Komponenten?
(6) Wie lautet die Nachgiebigkeitsmatrix A?

AUFGABE 4.5. *Gegeben ist folgendes System:*

[2]Die mathematische Standard-Formulierung eines Eigenwertproblems lautet $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ mit Eigenwert λ und Eigenvektor $\mathbf{x}$. Darin tritt nur *eine* Matrix auf. In unserem Fall treten zwei Matrizen, K und M auf. Man spricht dann von einem *verallgemeinerten* Eigenwertproblem.



(1) *Geben Sie die Steifigkeitsmatrix K an.*
(2) *Argumentieren Sie direkt (ohne auf die Steifigkeitsmatrix zurückzugreifen) mit den im System auftretenden Kräften und geben sie so an: Wenn nur die erste Komponente um $x_1 = 1$ aus der Gleichgewichtsposition ausgelenkt ist und die anderen beiden Komponenten nicht ausgelenkt sind, welche Kräfte treten dann an den Komponenten auf? Und analog: wenn nur die zweite Komponente um $x_2 = 1$, bzw. nur die dritte um $x_3 = 1$ ausgelenkt ist?*
(3) *Verwenden Sie die Resultate von Punkt 2 und die Linearität. Wie lauten bei einer allgemeinen Auslenkung $[x_1; x_2; x_3]$ die resultierenden Kräfte $[F_1; F_2; F_3]$?*
(4) *Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren von $A \cdot K$: die Matrix*

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ist die Inverse der Steifigkeitsmatrix K und daher die Nachgiebigkeitsmatrix.
(5) *Welche Auslenkung $[x_1; x_2; x_3]$ bewirken an den Komponenten angreifende Kräfte $[F_1; F_2; F_3]$?*
(6) *Stellen Sie in Gedanken die obige Skizze senkrecht und lassen Sie Gewichtskräfte an den Massen wirken. Welche statische Auslenkung ergibt sich unter Einfluss der Schwerkraft?*
(7) *Berechnen Sie mit dem Vektor der statischen Auslenkungen den Rayleigh-Quotienten. Was schätzen Sie damit ab?*

3. Allgemeine Form der Schwingungsgleichung

Wir betrachten das allgemeine Differentialgleichungssystem:

$$M\,\ddot{\mathbf{x}} + B\,\dot{\mathbf{x}} + K\,\mathbf{x} = 0$$

Dabei ist x ein Vektor und M, B, sowie K sind Matrizen. Wir wollen immer voraussetzen, dass M invertierbar ist. Multiplizieren wir von links mit M^{-1}, so erhalten wir

$$\ddot{\mathbf{x}} + M^{-1}\,B\,\dot{\mathbf{x}} + M^{-1}\,K\,\mathbf{x} = 0.$$

wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass unsere Gleichung die Form

$$\ddot{\mathbf{x}} + B\,\dot{\mathbf{x}} + K\,\mathbf{x} = 0$$

hat. Wir setzen $\dot{x} = y$ und erhalten.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad y \\ \dot{y} &= -K\,x - B\,y \end{aligned}$$

Führen wir nun die Bezeichnungen $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K & -B \end{pmatrix}$ ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\dot{\mathbf{z}} = A\,\mathbf{z},$$

die stark an die skalare Gleichung

$$\dot{x}(t) = a\,x(t)$$

erinnert. Diese hat die Lösung $x(t) = e^{a\,t}x_0$. Es ist naheliegend, e^A für eine Matrix A zu definieren, in der Hoffnung, für die Gleichung

$$\dot{\mathbf{z}} = A\,\mathbf{z}$$

die Lösung

$$\mathbf{z} = e^{A\,t}\,\mathbf{z}_0$$

zu erhalten, wobei $\mathbf{z}_0$ der Vektor $\mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ \vdots \\ z_{2\,n}(0) \end{pmatrix}$ ist. In Anlehnung an

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots$$

setzen wir

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}\,A^2 + \frac{1}{3!}\,A^3 + \ldots$$

Man kann zeigen, dass diese Reihe für alle A (elementweise) konvergiert. Also konvergiert auch die Reihe

$$e^{A\,t} = I + t\,A + \frac{t^2}{2}\,A^2 + \frac{t^3}{3!}\,A^3 + \ldots$$

Die Ableitung einer Matrix $B(t) = \{b_{i\,j}(t)\}$ ist durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,B(t) = \dot{B}(t) = \{\dot{b_{i\,j}}(t)\}$$

erklärt. Man kann dann unschwer zeigen, dass

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, e^{A\,t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I + t\,A + \frac{t^2}{2!}\,A^2 + \dots\right)\\ &= A + t\,A^2 + \frac{t^2}{2!}\,A^3 + \dots\\ &= A\left(I + t\,A + \frac{t^2}{2!}\,A^2 + \dots\right)\\ &= A\,e^{A\,t}\end{aligned}$$

gilt. Die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\mathbf{z}} = A\,\mathbf{z}, \qquad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

ist dann tatsächlich $\mathbf{z}(t) = e^{A\,t}\,\mathbf{z}_0$, denn

$$\dot{\mathbf{z}} = A\,e^{A\,t}\,\mathbf{z}_0 = A\mathbf{z}, \text{ und } e^{A\,0}\,\mathbf{z}_0 = I\,\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0$$

Man kann zeigen, dass die Lösung eindeutig bestimmt ist. Diese geschlossene Form der Lösung ist nur brauchbar, wenn man

$$e^{A\,t}$$

tatsächlich berechnen kann. Das ist für Diagonalmatrizen trivial, aber dann sind die Gleichungen auch unabhängig voneinander. Es gibt aber eine umfangreiche mathematische Theorie zur Lösung dieses Problems. Man verwendet dazu insbesondere die Jordansche Normalform einer Matrix A.[3] Wir werden uns damit nicht beschäftigen, notieren aber folgenden Satz:

Satz 4.1

Hat die Matrix A die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit den Vielfachheiten $m_1, \dots, m_k$, so ist jede Lösung von $\dot{z} = A\,z$ in der Form

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{k} \left(\mathbf{c}_{i1} + \mathbf{c}_{i2}\,t + \dots + \mathbf{c}_{i,m_i}\,t^{m_i-1}\right)\, e^{\lambda_i\,t}$$

darstellbar, wobei die $\mathbf{c}_{ij}$ passend zu wählende konstante Vektoren sind.

Das lädt natürlich dazu ein, zunächst einmal den Ansatz $\mathbf{c}e^{\lambda t}$ zu wählen, wenn man keine zusätzlichen Informationen hat!

AUFGABE 4.6. *Ein Auto fährt mit sehr grosser Geschwindigkeit über eine Bodenwelle (siehe Abbildung 4.2). Die Stoßdämpfer haben (Steifigkeit $k_1/4$, Dämpfung $b_2/4$). Der Fahrersitz ist mit eine Feder (Steifigkeit k_2, Dämpfung b_2) abgefedert. Die Bodenwelle wird mit Hilfe einer*

---

[3] Ist $A = B^{-1}\,DB$, wobei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \ddots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, so gilt $e^{A\,t} = \dots B^{-1}\,e^{D\,t}\,B = B^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1\,t} & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2\,t} & \dots \\ \ddots & 0 & e^{\lambda_n\,t} \end{pmatrix} B$

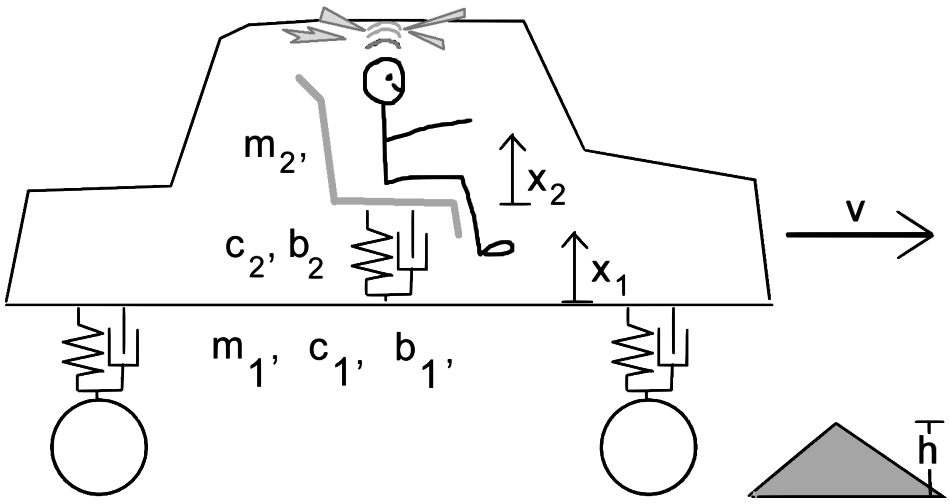


ABBILDUNG 4.2.

Deltafunktion δ_0 modelliert. Die einzelnen Größen haben folgende Werte:

$$\begin{array}{ccc} k_1 = 20000, & & k_2 = 200, \\ b_1 = 2000, & & b_2 = 80, \\ m_1 = 1000, & \textit{and} & m_2 = 100. \end{array}$$

Wie schwingt der Fahrersitz aus, bzw. ab welcher Geschwindigkeit haut sich der Fahrer den Kopf an, wenn die Distanz zwischen Kopf und Autodach 10 *cm sind.*

4. Der dynamische Schwingungstilger

Die Dauerlösung eines Systems mit einem Freiheitsgrad, das in der Nähe der Eigenfrequenz ω_k durch eine Schwingung mit der Frequenz ω angeregt wird, hat eine große Schwingungsamplitude. Falls keine Dämpfung vorhanden ist, kommt es sogar zur Resonanzkatastrophe. Diese Amplitude kann durch die Anbringung eines zusätzlichen Feder-Masse Systems reduziert werden. Die Idee dahinter ist, dass durch das neue Feder-Masse System ein zusätzlicher Freiheitsgrad gewonnen wird; die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 des neuen Systems sollen von der Erregerfrequenz ω weiter entfernt sein als die ursprüngliche kritische Frequenz ω_k.
Wir betrachten das System aus Abbildung 4.3 und setzen voraus, dass das Grundsystem durch die harmonische Funktion $F_0 \sin \omega t$ angeregt wird.
Die Bewegungsgleichungen für dieses System sind

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= F_0 \sin \omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $x_1(t) = A_1 \sin \omega t$ und $x_2(t) = A_2 \sin \omega t$, erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A_1 - k_2A_2 &= F_0, \\ -k_2A_1 + (k_2 - m_2\,\omega^2)A_2 &= 0; \end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

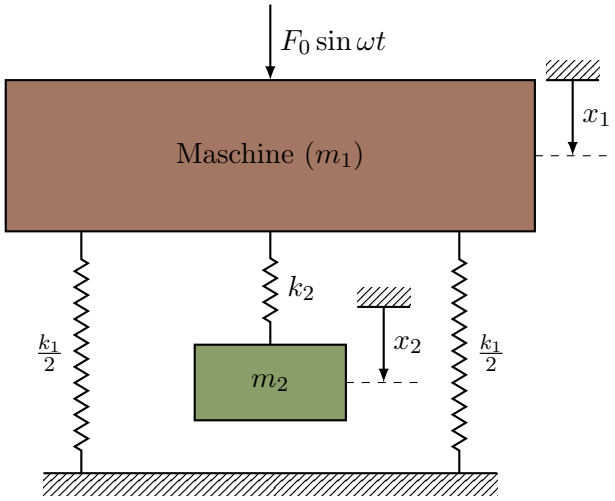


ABBILDUNG 4.3. Dynamischer Schwingungstilger

Die Systemdeterminante ist

$$D = \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{vmatrix} = \left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 - m_2\omega^2\right) - k_2^2.$$

Mit der Cramerschen-Regel folgt, dass

$$A_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} F_0 & -k_2 \\ 0 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{vmatrix} = \frac{F_0\,(k_2 - m_2\,\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\,\omega^2) - k_2^2} \tag{4.13}$$

und

$$A_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & F_0 \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{F_0\,k_2}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\,\omega^2) - k_2^2}.$$

Wir wollen die Schwingung der Masse m_1 (unserer Maschine) tilgen. Anders gesagt, soll $A_1 = 0$. Das ist der Fall, wenn der Zähler von (4.13) verschwindet, also wenn

$$\frac{k_2}{m_2} = \omega^2$$

ist. Wir gehen davon aus, dass die Maschine im Bereich der Eigenfrequenz betrieben wird. Dann gilt

$$\omega = \omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

und somit

$$\frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \tag{4.14}$$

Nehmen wir der Einfachheit halber vorerst einmal an, dass (4.14) erfüllt ist – man sagt in diesem Fall: das Tilgersystem ist auf die Erregerfrequenz abgestimmt. Wir untersuchen das Verhalten von A_1 bei variablem ω in Abhängigkeit von

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}.$$

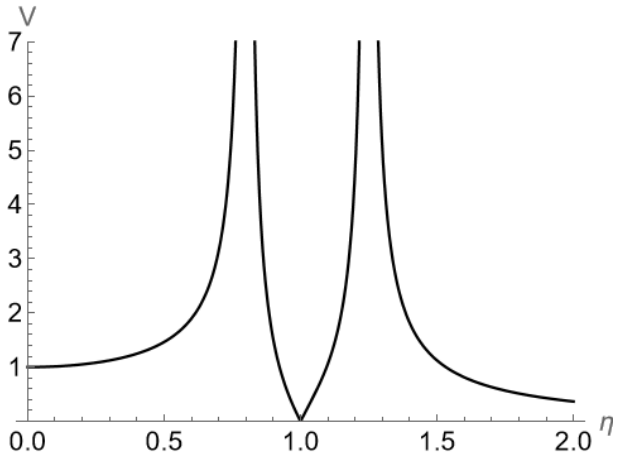


ABBILDUNG 4.4. Betrag des dimensionslosen Verstärkungsfaktors $V(\eta, \mu)$ aus Gleichung 4.15 für $\mu = 0{,}2$

Setzt man nun

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_{11}},$$

kürzt (4.13) durch k_2, und hebt im Nenner k_1 heraus, so ergibt sich

$$A_1 = \frac{F_0}{k_1} \frac{1 - \eta^2}{\eta^4 - \eta^2 - (1 + \mu)\eta^2 + 1} = \frac{F_0}{k_1} V(\eta, \mu). \tag{4.15}$$

Der Betrag des dimensionslosen Verstärkungsfaktors V als Funktion von η ist in Abbildung 4.4 für $\mu = 0{,}2$ dargestellt

Der Vorteil dieser Art der Schwingungstilgung ist, dass die Amplitude der Dauerlösung für die Schwingung der primären Masse Null ist, anderseits entnehmen wir der Abbildung, dass eine der Unendlichkeitsstellen des Vergrößerungsfaktors unter der Erregerfrequenz liegt, die $\eta = 1$ entspricht. Die andere liegt darüber. Da keine Dämpfung vorhanden ist, kann es beim Anfahren der Maschine daher zu großen Schwingungsausschlägen kommen. Außerdem steigt die Amplitude links und rechts von $\eta = 1$ stark an. Das bedeutet, dass bei Schwankungen der Erregerfrequenz ebenfalls große Amplituden auftreten können. Man kann natürlich versuchen, die Unendlichkeitsstellen noch weiter auseinander zu schieben, was durch Vergrößerung von m_2 möglich ist, aber das ist natürlich kostspielig. Wählt man m_2 in der Größenordnung von einem Fünftel oder einem Viertel der Primärmasse m_1, so sind die Unendlichkeitsstellen des Vergrößerungsfaktors ungefähr bei $\eta = 0.8$ und 1.2.

Näherungsweise (unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung μ^2) liegen die Unendlichkeitsstellen bei

$$\eta_\infty = 1 \pm \frac{\sqrt{\mu}}{2} + \frac{\mu}{8}.$$

BEISPIEL 4.1. Ein Dieselmotor mit einem Gewicht von 3000 N ist auf einem Sockel gelagert. Es wurde beobachtet, dass der Motor bei einer Betriebsdrehzahl von 6000 U/min über seinen Sockel Schwingungen in die Umgebung induziert. Bestimmen Sie die Parameter des Schwingungsdämpfers, der die Schwingungen reduziert, wenn er auf dem Sockel montiert ist. Die

Größe der Erregungskraft beträgt 250 N und die Amplitude der Bewegung der Hilfsmasse soll auf 2 mm begrenzt werden.

Beispiel 4.2. Eine Maschine mit 100 kg Eigengewicht ist in der Mitte eines Balkens angebracht, der an beiden Enden gelenkig unterstützt wird. Der Balken habe eine Länge von 3 Metern, einen Elastizitätsmodul von $200 \cdot 10^9$ N/m^2, und ein axiales Flächenträgheitsmoment von $1,3 \cdot 10^{-6}$m^4. Während des Betriebes treten an der Maschine harmonische Kräfte mit einer Amplitude von 5000 N bei Geschwindigkeiten von 600 und 700 r/min auf. Entwerfen Sie einen ungedämpften Schwingungstilger, sodass die Amplitude der Dauerlösung bei allen Betriebszuständen kleiner als 3mm ist.

Aufgabe 4.7. *Eine Maschine mit 200kg Eigengewicht ist mit einer Feder der Steifigkeit $4 \cdot 10^5 N/m$ verbunden. Die Maschine wird durch eine harmonische Kraft der Amplitude 500 N belastet, die Frequenz sei 50 rad/s. Entwerfen sie einen ungedämpften Schwingungstilger so, dass die Schwingungsamplitude der Dauerlösung für die primäre Masse Null ist und für die sekundäre höchstens 2 mm.*

Aufgabe 4.8. *Man vergleiche die Bodenkraft der Maschine aus Aufgabe 4.7 ohne Schwingungstilger mit der Bodenkraft nach Anbringung des Schwingungstilgers.*

5. Der dynamische Schwingungstilger mit Dämpfung

Bei Schwingungstilgern ohne Dämpfung haben wir folgende Nachteile festgestellt:

(1) Da die niedrigere der beiden Eigenfrequenzen des neuen Systems unter der Betriebsdrehzahl ist, treten beim Anfahren der Maschine hohe Amplituden auf.
(2) Da die Amplitude der primären Masse schon bei geringer Abweichung von der Betriebsdrehzahl sehr groß wird, kann man den Schwingungstilger bei variablen Drehzahlen nicht mehr gut einsetzen.

Aus diesem Grund dämpft man Tilgersysteme. Wir betrachten das System aus Abbildung 4.5 und setzen voraus, dass das Grundsystem durch die harmonische Kraft $F_0 \sin \omega t$ angeregt wird.

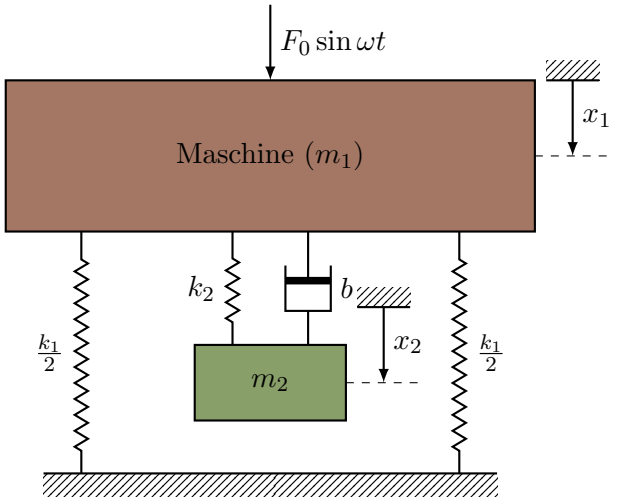


Abbildung 4.5. Dynamischer Schwingungstilger mit Dämpfung

Die Bewegungsgleichungen für dieses System sind

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= F_0 \sin\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Wir rechnen der Einfachheit halber mit der Störfunktion $F_0\, e^{i\omega t}$ (der Imaginärteil davon ist $F_0 \sin\omega t$) und setzen die komplexe Lösung an als $x_1(t) = A_1 e^{i\omega t}$, $x_2(t) = A_2 e^{i\omega t}$ (die Lösung des Gleichungssystems (4.16) ist der Imaginärteil davon). Wir erhalten so

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2 + ib\,\omega)A_1 - (k_2 + ib\,\omega)A_2 &= F_0 \\ -(k_2 + ib\,\omega)A_1 + (k_2 - m_2\,\omega^2 + ib\omega)A_2 &= 0; \end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + ib\omega + k_1 + k_2 & -ib\omega - k_2 \\ -ib\omega - k_2 & -m_2\omega^2 + ib\omega + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die beiden Amplituden A_1, A_2 bestimmen; hier mittels Determinanten (Cramerschen Regel). Die Determinante der Systemmatrix $\mathcal{A}$ dieses Systems ist

$$\det(\mathcal{A}) = m_1m_2\,\omega^4 - i(m_1 + m_2)b\,\omega^3 - (m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2)\,\omega^2 + ibk_1\,\omega + k_1k_2.$$

Damit haben die komplexen Amplituden die Werte

$$A_1 = F_0\,\frac{k_2 - m_2\,\omega^2 + ib\,\omega}{\det(\mathcal{A})}$$

und

$$A_2 = F_0\,\frac{k_2 - ib\,\omega}{\det(\mathcal{A})}\ .$$

Setzen wir wie vorhin

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_{11}}$$

sowie

$$\omega_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad \nu = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}} \quad \text{und} \quad D = \frac{b}{2m_2}\frac{1}{\omega_{22}},$$

so erhalten wir die Verstärkungsfaktoren

$$|A_1|\,\frac{k_1}{F_0} = \sqrt{\frac{(2D\eta\nu)^2 + (\eta^2 - \nu^2)^2}{(2D\eta\nu)^2\,(\eta^2(\mu+1) - 1)^2 + (\eta^4 - \eta^2\,((\mu+1)\nu^2 + 1) + \nu^2)^2}}$$

und

$$|A_2|\,\frac{k_1}{F_0} = \sqrt{\frac{(2D\eta\nu)^2 + \nu^4}{(2D\eta\nu)^2\,(\eta^2(\mu+1) - 1)^2 + (\eta^4 - \eta^2\,((\mu+1)\nu^2 + 1) + \nu^2)^2}}$$

Wir entnehmen Abbildung 4.6, dass die Schaubilder der Vergrößerungsfaktoren für verschiedene Werte von D – bei gleichbleibenden Werten von μ und ν – durch die Punkte P und Q gehen. Da diese Punkte die Amplituden rechts und links von $\eta = 1$ bestimmen, ist es naheliegend, ν so zu wählen, dass sie gleich hoch sind. Wir bestimmen P und Q aus den Kurven für $D = 0$ und $D = \infty$:

$$\frac{\eta^2 - \nu^2}{\eta^4 - \eta^2\,((\mu+1)\nu^2 + 1) + \nu^2} = \frac{1}{1 - \eta^2(1+\mu)}$$

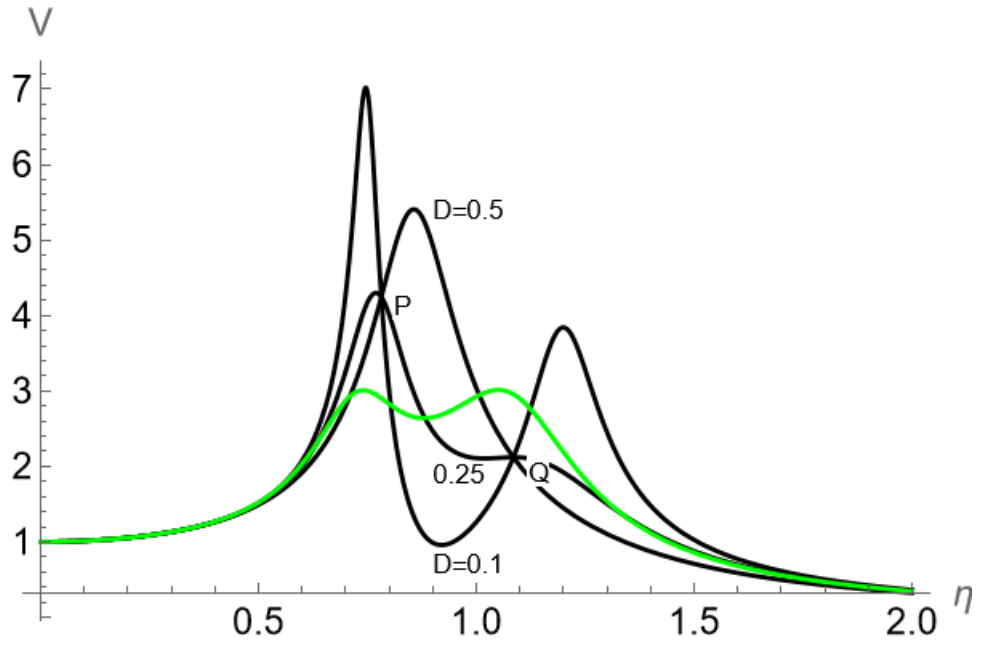


ABBILDUNG 4.6. Verlauf der Vergrößerungsfaktoren für Masseverhältnis $\mu = 0{,}25$.

Schwarze Kurven für Abbstimmverhältnis $\nu = 0{,}9$ und verschiedene Werte von D. Alle Kurven gehen durch die Punkte P und Q, die aber nicht auf gleicher Höhe liegen.

Grüne Kurve: optimales Abstimmverhältnis $\nu = 0{,}8$ und optimales $D = 0{,}274$ gemäß Gleicungen (4.17) und (4.18). Der maximale Verstärkungsfaktor ist $V_{max} \approx \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}$.

Daraus erhalten wir eine biquadratische Gleichung in η. Für die Abszissen η_1 und η_2 von P und Q ergibt sich die Beziehung

$$\eta_{1,2}^2 = \frac{1}{2+\mu}\left(\nu^2(1+\mu) + 1 \mp \sqrt{\nu^4(1+\mu)^2 - 2\nu^2 + 1}\right)$$

Eine elementare Rechnung zeigt nun, dass die Vergrößerungsfaktoren an den Stellen η_1 und η_2 gleich groß sind, wenn

$$\nu = \frac{1}{1+\mu} \tag{4.17}$$

ist. Langwieriger ist es, einen optimalen D-Wert zu finden. Eine mögliche Bedingung dafür lautet, dass P und Q auch Maxima sind. Exakt lässt sich das nicht erreichen. Jede Parameterwahl ist ein Kompromiss. In der Literatur findet man daher verschiedene Angaben für „optimale“ Parameter.

$$D = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} \tag{4.18}$$

Zusammenfassung. Ein gedämpfter Schwingungstilger ist durch folgende Parameter charakterisiert.

$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$	kritische Frequenz des Hauptsystems
$\omega_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$	kritische Frequenz des Tilgersystems
$\mu = \frac{m_2}{m_1}$	Massenverhältnis Tilger zu Hauptmasse
$\nu = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}$	Abstimmverhältnis des Tilgersystems

Man spricht, je nachdem, ob $\nu < 1$ oder $\nu > 1$, von einem *tief* oder *hoch* abgestimmten Tilger.

$D = \frac{b_2}{2\sqrt{k_2 m_2}}$	Dämpfungsgrad des Tilgers

Es ist laut Theorie besser, den Tilger tief abzustimmen. Ein optimales Abstimmverhältnis und passender Dämpfungsgrad sind

$$\nu = \frac{1}{1+\mu} \quad \text{und} \quad D = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}.$$

Bei dieser Parameterwahl ist der maximale Verstärkungsfaktor über den gesamten Frequenzbereich

$$V_{max} \approx \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}$$

Aufgabe 4.9. *Gegeben sei die Konfiguration von Beispiel 4.2. Man führe eine optimale Schwingungstilgung mit Dämpfung ein. Es sei* $\mu = 0.25$ *und die Drehzahl 600 r/min. wie groß ist die Amplitude der Schwingung des Primärsystems?*

KAPITEL 5

Nichtlineare Systeme

Bei unseren bisherigen Überlegungen sind wir von der Linearität der Bewegungsgleichungen ausgegangen. Wir haben vorausgesetzt, dass die Rückstellkraft einer Feder proportional zur Auslenkung ist, die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit, und die Masse konstant bleibt. Bei solchen Systemen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsfunktion. Nun sind aber insbesondere die ersten zwei Voraussetzungen meist nur annähernd erfüllt, wodurch die Bewegungsgleichungen nichtlinear werden, und der Zusammenhang zwischen Belastung (Störfunktion, Eingangsfunktion) und Systemantwort (Lösung, Ausgangsfunktion) nicht mehr linear ist. Auch funktionieren unsere bisherigen Lösungsverfahren nicht mehr, da Linearkombinationen von Lösungen keine Lösungen mehr sein müssen.
Die allgemeinste Form der Differentialgleichung so eines Systems, die wir betrachten ist

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t). \tag{5.1}$$

Exakte Lösungen sind hier schwer zu finden und rar; die Methoden schwierig. Man trachtet daher, Aussagen über das Verhalten solcher Systeme treffen zu können, etwa ob es periodische Lösungen gibt, welche Periode sie haben, bzw. ob es beschränkte Lösungen gibt, wenn sie nicht periodisch sind. Dabei sind Phasenraumdiagramme, implizite Lösungen und Energiebetrachtungen sehr hilfreich. Alternativ kann man mit numerischen Verfahren die Lösungen sehr genau berechnen.
Eine andere Vorgehensweisen ist die Betrachtung von linearen Ersatzsystemen. In allen Fällen sind Energiebetrachtungen hilfreich.

1. Phasenraum autonomer Systeme

Betrachten wir zunächst diese Systeme ganz allgemein. Ein AUTONOMES SYSTEM hat die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

wobei die rechte Seite von t unabhängig (autonom) ist. Darunter fallen auch alle autonomen DGLn n-ter Ordnung

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}).$$

Im Folgenden wollen wir uns mit den autonomen Systemen in der Ebene beschäftigen. Dabei wählen wir die Form

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{5.2}$$

Eine Darstellung von Orbits zu unterschiedlichen Anfangsbedingungen, idealer Weise auch mit Pfeilen, die anzeigen, in welcher Richtung die Bahnen durchlaufen werden, heißt PHASENPORTRAIT (auch: PHASENRAUMDIAGRAMM, ZUSTANDSDIAGRAMM. Der Begriff *Phasendiagramm*

wird in diesem Zusammenhang gelegentlich verwendet; er ist allerdings schon anderweitig vergeben: man bezeichnet damit üblicherweise die thermodynamischen Zustände und zugehörigen Phasen eines Systems in Abhängigkeit von Druck und Temperatur.)
Das Paar (x, y) zu einem Zeitpunkt t wird als ZUSTAND des Systems bezeichnet; das Diagramm, das entsteht, wenn man ausgehend von einem Anfangszustand $(x(0), y(0))$ weitere Wertepaare $(x(t), y(t))$ für einen Bereich $t > 0$ einzeichnet, wird als BAHN, TRAJEKTORIE oder ORBIT des Systems im Zustands- oder Phasenraum bezeichnet.
Neben der Parameterdarstellung $x = x(t)$ und $y = y(t)$ besteht auch oftmals die Möglichkeit einer expliziten Darstellung als $y = y(x)$ oder $x = x(y)$ oder in impliziter Form als $F(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Genauer gesagt, nehmen wir an, dass $x = x(t)$ auf einem Intervall umkehrbar ist, das heißt $t = t(x)$. Somit erhalten wir für $y = y\,(t(x)) =: y(x)$. Differentiation nach x ergibt

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad \text{falls } f(x, y) \neq 0. \tag{5.3}$$

Diese DGL wird PHASEN- oder BAHNEN-DGL von (5.2) genannt. Ihre implizite Form ist

$$g(x, y) - f(x, y)y' = 0.$$

Nun kehren wir zu unseren Schwingungen zurück und erhalten, dass (5.1) im autonomen Fall die Form

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{5.4}$$

hat. Wir setzen $\dot{x}$ als Funktion v von x. Dann folgt mit der Kettenregel

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v'(x)\dot{x} = v'(x)v(x).$$

Mit (5.4) folgt daraus die zugehörige Phasen-DGL:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v}f(x, v). \tag{5.5}$$

In dieser DGL wird nur die Abhängigkeit der Geschwindigkeit v vom Ort x untersucht; die Zeit t wird dabei komplett vernachlässigt. Die allgemeine Lösung $v = v(x)$ der Phasen-DGL (5.5) stellt ein VORINTEGRAL von (5.4) dar.
Allgemein gilt folgendes Lösungsverfahren:

Lösungsverfahren für die autonome DGL:

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x, \dot{x}) \\ x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0. \end{cases}$$

1. Sämtliche Nullstellen ξ von $f(\xi, 0) = 0$ bestimmen partikuläre Lösungen $x(t) = \xi$ (in Ruhelage).
2. Substituiere $v(x) = \dot{x}$. Dann gilt $\ddot{x} = vv'$ und für $v(x)$ gilt die DGL
$$vv' = f(x, v).$$
3. Bestimme die allgemeine Lösung $v(x) = v(x, c_1)$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$ mittels Trennung der Variablen.
4. Löse das Anfangswertproblem $v_0 = \dot{x}(t_0) = v(x(t_0), c_1)$.
5. Trennung der Variablen liefert die allgemeine implizite Lösung
$$t + c_2 = \int \frac{\mathrm{d}\xi}{v(\xi, c_1)}.$$
6. Das Anfangswertproblem liefert für die implizite Lösung
$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{v(\xi, c_1)}.$$

Beispiel 5.1. Löse die DGL

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\dot{x}^2}{5x}, \\ x(0) = \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

Lösung. 1. $\dot{x}(t) = 0$ liefert $x(t)$ konstant. Das ist aber für die Anfangsbedingungen irrelevant.

2. Setze $v(x) = \dot{x}$. Dann ist $\ddot{x} = vv'$ und somit
$$vv' = -\frac{v^2}{5x}$$
3. Trennung der Variablen liefert
$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{5x} \quad \Rightarrow \quad v(x) = c_1 x^{-\frac{1}{5}}.$$
4. Wir setzen die Anfangswerte ein und erhalten
$$1 = v_0 = v(x_0, c_1) = c_1.$$
5. Es folgt, dass
$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(x) = x^{-\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \quad t + c_2 = \int x^{\frac{1}{5}} \,\mathrm{d}x = \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}}.$$
6. Nochmaliges Einsetzen der Anfangswerte liefert $c_2 = \frac{5}{6}$ und somit
$$x(t) = \left(\frac{6}{5}t + 1\right)^{\frac{5}{6}}.$$ ■

Kehren wir nun zu einem konkreteren Beispiel zurück und betrachten den harmonischen Oszillator.

Beispiel 5.2. Man bestimme für das System

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{5.6}$$

mit $m = 4\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{N/m}$ die Bahnkurve in der Phasenebene zu den Anfangsbedingungen $x(0) = \sqrt{6}\,\mathrm{m}$, $\dot{x}(0) = 0$.

Lösung. Wir formen die Gleichung zunächst wie in (5.4) um

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = f(x, \dot{x}).$$

Mit $v = \dot{x}$ erhalten wir die Phasen-DGL als

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v}f(x, v) = -\frac{k}{m}\frac{x}{v}.$$

Multiplikation mit $mv\,\mathrm{d}v$ gibt

$$mv\,\mathrm{d}v = -kx\,\mathrm{d}x\,.$$

Wir integrieren beide Seiten (Integrationskonstante nicht vergessen):

$$m\frac{v^2}{2} = -k\frac{x^2}{2} + C.$$

Mit den gegebenen Werten von m und k, sowie den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$4\frac{v^2}{2} + 4\frac{x^2}{2} = 12.$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt im Ursprung,

$$x^2 + v^2 = r^2,$$

und Radius $r = \sqrt{6}$.
Abbildung 1 zeigt (allen die nicht wissen, wie ein Kreis aussieht) die von dieser Gleichung bestimmte Bahn (man sagt auch: diesen *Orbit*) im Phasenraum. ■

2. Energiemethode

Im speziellen Fall, dass die Funktion f in (5.4) nur von x und nicht von $\dot{x}$ abhängt, d.h.

$$\ddot{x} = f(x), \tag{5.7}$$

können wir die Energiemethode zur Bestimmung einer Lösung verwenden:

1. Wenn $f(\xi) = 0$, dann ist $y = \xi = \text{const}$ eine partikuläre Lösung.
2. Wir multiplizieren die DGL (5.7) mit $2\dot{x}$ und integrieren nach t:

$$2\dot{x}\ddot{x} = 2f(x)\dot{x} \quad \Rightarrow \quad (\dot{x})^2 = 2F(x) + C_1, \tag{5.8}$$

   wobei F eine Stammfunktion von f ist.
3. Auflösen nach $\dot{x}$ gibt schließlich:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2F(x) + C_1} \quad \Rightarrow \quad t = \pm\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2F(x) + C_1}} + C_2$$

   mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

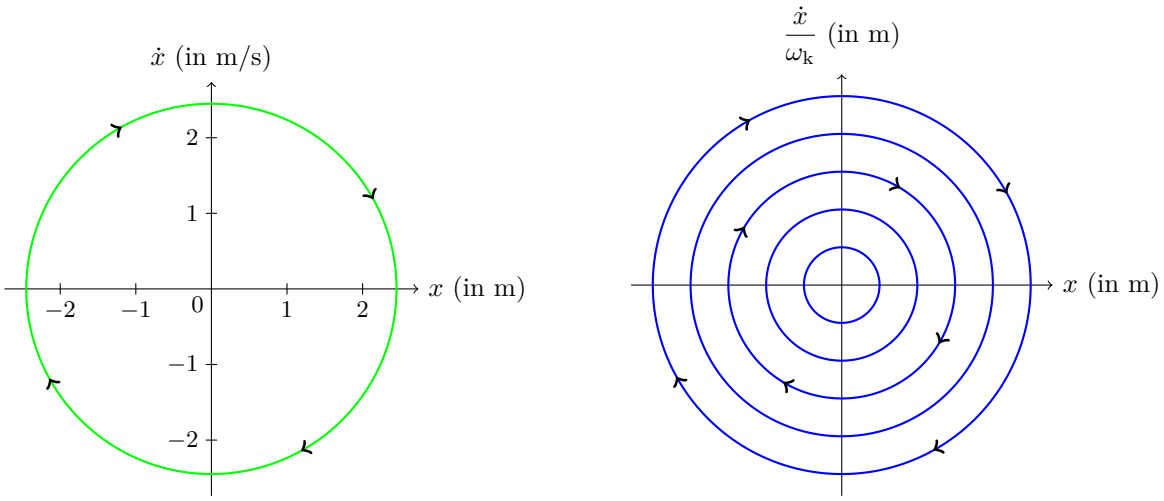


ABBILDUNG 5.1. Links — Orbit im Phasenraum für die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen aus 5.6.
Rechts — Phasenraumporträt für das System $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$. Beachte: die Geschwindigkeit $\dot{x}$ ist hier auf der vertikalen Achse mit ω_k skaliert eingezeichnet. Damit bleiben die Bahnen auch für allgemeine Werte von k und m Kreise!

Wenn wir in der rechten Gleichung von (5.8) $\dot{x}$ mit y ersetzen erhalten wir das Vorintegral

$$U(x, y) = y^2 - 2F(x).$$

Die Funktion F nennt man das POTENTIAL der Kraft. Die Schaubilder von

$$U(x(t), \dot{x}(t)) = E$$

in der $x\dot{x}$-Ebene sind die *Phasenraumdiagramme*.

BEISPIEL 5.3. Betrachten wir folgende Kräftegleichung:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \tag{5.9}$$

Dann multiplizieren wir beide Seiten mit $\dot{x}$ und integrieren nach t:

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{\dot{x}^2}{2} + k\frac{x^2}{2} = C.$$

Diese letzte Gleichung besagt, dass die Summe aus kinetischer und potentieller Energie immer konstant ist.

Systeme, bei denen Gesamtenergie konstant bleibt, bezeichnet man als KONSERVATIV, und nennt $U(x, \dot{x}) = E$ eine implizite Lösung, im Gegensatz zu einer Darstellung von x als expliziter Funktion von t.
Im Folgenden zeigen wir, dass man unter Zuhilfenahme impliziter Lösungen wertvolle qualitative und quantitative Aussagen über $x(t)$ machen kann.

3. Das mathematische Pendel

Für das mathematische Pendel (Abbildung 5.2) erhalten wir folgendes Kräftegleichgewicht:

$$ma(t) = -mg\sin(\varphi).$$

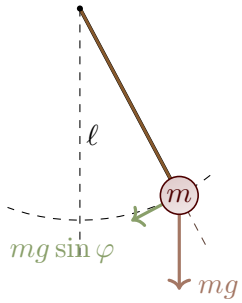


ABBILDUNG 5.2. Das mathematische Pendel

Dabei beschreibt $a(t)$ die Beschleunigung auf der Kreisbahn. Nachdem bei einer vollen Umdrehung von 2π, die Masse eine Strecke der Länge $2\pi\ell$ zurücklegt, folgt, dass bei einer Bewegung um φ die Masse eine Strecke der Länge $\ell\varphi$ zurücklegt. Damit ergibt sich die Beschleunigung als zweite Ableitung – $a(t) = \ell\ddot{\varphi}(t)$. Wir erhalten also die nichtlineare Bewegungsgleichung

$$m\ell\ddot{\varphi}(t) = -mg\sin\varphi(t)$$

mit $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$, welche man leicht in die Form

$$\ell\ddot{\varphi}(t) + g\sin\varphi(t) = 0$$

überführt. Die Ruhelagen sind $x(t) = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für die allgemeine Lösung berechnen wir zunächst ein Vorintegral (Multiplikation mit $\dot{\varphi}(t)$ und Integration nach t):

$$\begin{aligned} \ell\dot{\varphi}(t)\,\ddot{\varphi}(t) + g\,\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}^2(t) - g\cos\varphi(t) = c_1 \\ &\Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2}{\ell}\left(c_1 + g\cos(\varphi)\right)}, \end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen $\pm$ dem Hin- und Rückschwingen des Pendels entspricht. Aus den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ erhalten wir $c_1 = -g\cos(\varphi_0)$ und somit die implizite Lösung

$$t = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2\left(\cos(\xi) - \cos(\varphi_0)\right)}},$$

wobei $\omega^2 = \ell/g$.
Die SCHWINGUNGSDAUER T ist die Zeit einer ganzen Periode $t(\varphi_0 \to 0 \to -\varphi_0 \to 0 \to \varphi_0)$, oder zweimal eine Halbe $2t(\varphi_0 \to 0 \to -\varphi_0)$, oder viermal eine Viertelte $4t(\varphi_0 \to 0)$. Also erhalten wir

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2\left(\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)\right)}}.$$

Wir erinnern uns an die Formel

$$\cos(\alpha) = \cos\left(2\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Damit ergibt sich für den Ausdruck unter der Wurzel

$$T = \frac{2}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}}.$$

Schließlich substituieren wir

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\sin(u).$$

Ableiten auf beiden Seiten liefert

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\cos(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Wir formen geeignet um und erhalten

$$\mathrm{d}\varphi = 2\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\cos(u)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\,\mathrm{d}u = 2\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\cos(u)}{\sqrt{1-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}u = 2\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\cos(u)}{\sqrt{1-\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2\sin\left(u\right)^2}}\,\mathrm{d}u\,.$$

Eingesetzt in das Integral folgt schließlich

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2\sin\left(u\right)^2}} \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\cos(u)}{\sqrt{1-\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2\sin\left(u\right)^2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{4}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{1-\sin\left(u\right)^2}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{1-k^2\sin\left(u\right)^2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{4}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin\left(u\right)^2}}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass *die Schwingungsdauer sehr wohl von* φ_0 abhängt. Das letzte Integral ist ein ELLIPTISCHES INTEGRAL und im Allgemeinen nicht durch elementare Funktionen darstellbar. Auch hier helfen Computeralgebrasysteme. So liefert Matlab den Wert 2,6221 für das Integral

$$T = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos(\pi/2)}}.$$

In anderen Worten, für $\varphi_0 = \pi/2$ ist

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,7{,}416.$$

Wenn man, wie üblich, für kleine Winkel $\sin\varphi = \varphi$ setzt, so ist

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

und $\omega_k = \sqrt{g/\ell}$. Für T erhalten wir damit

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,2\pi = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,6{,}283\,\mathrm{s},$$

eine vom maximalen Ausschlag unabhängige Größe.
Ein Pendel, dessen Schwingungsdauer 2 Sekunden beträgt, nennt man SEKUNDENPENDEL. Löst man die Beziehung

$$2 = T = \sqrt{\frac{\ell_0}{g}}\,2\pi$$

nach ℓ_0 auf, so erhält man

$$\ell_0 = \frac{g}{\pi^2} \approx 1\,\mathrm{m}$$

für die Länge des Sekundenpendels.

4. Schwache Federn

Die Rückstellkraft $f(x)$ einer Feder haben wir bisher immer als

$$f(x) = kx$$

angenommen. Wir wollen nun auch andere Rückstellkräfte untersuchen. Dazu wollen wir voraussetzen, dass f ungerade ist, das heißt

$$f(-x) = -f(x)$$

für alle x, und dass $f(x)$ für positive x ebenfalls positiv ist – zumindest in einer Umgebung des Nullpunktes. Ist rechts vom Nullpunkt $f''(x) < 0$, so spricht man von einer SCHWACHEN FEDER. Da f eine ungerade Funktion ist, beginnt die Taylorreihenentwicklung von f also mit

$$f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots .$$

Daher ist die einfachste Form für die Rückstellkraft $f(x)$ einer schwachen Feder

$$f(x) = x - x^3, \quad |x| < 1.$$

(Für $|x| > 1$ wechselt f das Vorzeichen, wirkt also nicht mehr rückstellend, sondern abstoßend.) Setzen wir $m = 1$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + x(t) - x(t)^3 = 0. \tag{5.10}$$

Die allgemeinere Gleichung

$$m\ddot{x}(t) + a_1 x(t) - a_3 x(t)^3 = 0$$

lässt sich durch geeignete Skalierung auf die Form (5.10) bringen: setze $\omega = \sqrt{a_1/m}, \ell = \sqrt{a_1/a_3}$; eine Variablentransformation $\hat{x} = x/\ell, \hat{t} = \omega t$ transformiert Gleichung 5.10 in

$$\frac{d^2}{d\hat{t}^{\,2}}\hat{x} + \hat{x} - \hat{x}^3 = 0 \ ,$$

also auf die Form der Gleichung 5.10.
Nachdem die Rückstellkraft nicht von der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ abhängt, können wir die Energiemethode verwenden. Um ein Vorintegral zu erhalten, multiplizieren wir Gleichung 5.10 also zunächst mit $\dot{x}(t)$. Das ergibt

$$\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \dot{x}(t)x(t) - \dot{x}(t)x^3(t) = 0,$$

woraus wir durch Integration das Vorintegral

$$U(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\dot{x}^2(t)}{2} + \frac{x^2(t)}{2} - \frac{x^4(t)}{4}$$

erhalten.
Wir betrachten nun die Gleichung $U(x, \dot{x}) = E$ für verschiedene Werte $E \geq 0$ in der $x\dot{x}$-Ebene. Dazu schreiben wir sie in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= -x^2 + \frac{x^4}{2} + 2E \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 1)^2 + \frac{4E - 1}{2}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die Lösungskurven sind also sowohl bezüglich der x-Achse, als auch bezüglich der $\dot{x}$-Achse symmetrisch.
Zuerst suchen wir Lösungen $(x,\, \dot{x})$ der Differentialgleichung (5.10), für die sich der Körper in der Ruhelage befindet. Ruhelage heißt, dass $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ gilt. Aus $\ddot{x} = 0$ eingesetzt in (5.10) folgt, dass sich der Körper an einer Stelle $(x,\, \dot{x}) = (c,\, 0)$ in Ruhelage befindet, für die

$$c - c^3 = 0$$

ist, und damit

$$c(1 - c^2) = 0.$$

Das gibt die Lösungen $c = 0$ und $c = \pm 1$. So erhalten wir in der $x\dot{x}$-Ebene die Punktlösungen

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (-1, 0).$$

Diese Punkte nennt man auch KRITISCHE PUNKTE.
Nun gehen wir daran, die Kurven zu finden, die einen kritischen Punkt enthalten. Dazu bestimmen wir die zugehörige Energie E.
Für $(0, 0)$ ist $E = 0$, und die Gleichung (siehe (5.11))

$$\dot{x}^2 = -x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right), \quad |x| < 1,$$

hat außer $x = \dot{x} = 0$ keine Lösungen, da die rechte Seite für $0 < |x| \leq 1$ immer negativ ist, die linke aber nie.
Für $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ ist $E = \frac{1}{4}$ und wir suchen das Schaubild von

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^2,$$

also von

$$\dot{x} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 - 1).$$

Es sind Parabeln, die durch die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ hindurchgehen (Abb. 5.3).
Im Bereich $|x| < 1$ erhalten wir zwei Parabelbögen C_1 und C_2, wobei der erste über der x-Achse und der zweite darunter liegt. Es ist leicht zu sehen, dass sich die Punkte auf C_1 gegen $(1,\ 0)$ und die auf C_2 gegen $(-1,\ 0)$ bewegen, diese Punkte in endlicher Zeit aber nicht erreichen.
Für $E < \frac{1}{4}$ liegen die Lösungskurven innerhalb des durch C_1 und C_2 begrenzten Bereiches. Da sie bezüglich der Koordinatenachsen symmetrisch sind und auch keine kritischen Punkte enthalten, müssen es geschlossene Kurven sein, wobei die x-Achse in den Punkten

$$\left(\pm\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4E}}, 0\right)$$

geschnitten wird und die $\dot{x}$-Achse in den Punkten $(0, \pm\sqrt{2E})$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Kurven außerhalb des von C_1 und C_2 begrenzten Bereiches wie in der Abbildung eingezeichnet aussehen.
Ein weiterer Punkt von Interesse ist die Periodendauer T. Die Schwingungsdauer ist die Zeit, die das System braucht, um eine Phasenkurve zu durchlaufen. Da das Phasenraumdiagramm

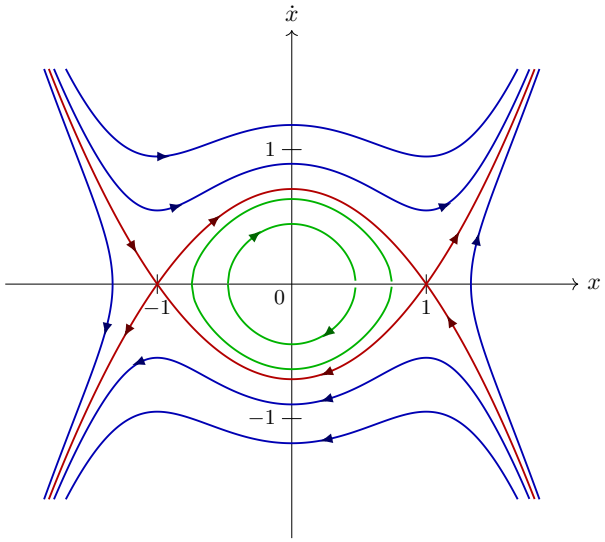


ABBILDUNG 5.3. Phasenraumporträt für das System $\ddot{x} + x - x^3 = 0$, vergleiche 5.11.
Geschlossene Bahnen (grün) in der Umgebung des Ursprungs sind für Gesamtenergie $0 < E < 1/4$ möglich. Zu $E = 1/4$ gehört die rote Kurve (die Separatrix); sie trennt Bereiche offener und geschlossener Bahnen. Die blauen Bahnen oberhalb und unterhalb der Separatrix entsprechen $E > 1/4$. Für die blauen Bahnen links und rechts der Separatrix ist $E < 1/4$ und kann auch negativ sein.

hier symmetrisch sowohl um die x- als auch die $\dot{x}$-Achse ist, berechnen wir nur eine Viertel-Periode, nämlich die Zeit, die das System braucht, um von einen Punkt $(0, v_{\max})$ zum Punkt $(x_0, 0)$ zu gelangen. Schreibt man $T/4$ als Integral

$$T/4 = \int_0^{T/4} 1\, dt$$

und substituiert $x(t)$ für t erhält man mit $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ und $dt = \frac{dx}{\dot{x}}$

$$T/4 = \int_0^{x(T/4)} 1\, \frac{dx}{\dot{x}}\ . \tag{5.12}$$

Setzt man $\dot{x}$ oben ein erhält man für die Periodendauer T im Fall $E < \frac{1}{4}$

$$T = 4 \int_0^{\sqrt{1-\sqrt{1-4E}}} \frac{dx}{\sqrt{2E - x^2 + \frac{x^4}{2}}}. \tag{5.13}$$

Für $E = 1/4$ ist

$$4 \int_0^{\sqrt{1-\sqrt{1-4E}}} \frac{dx}{\sqrt{2E - x^2 + \frac{x^4}{2}}} = 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(1-x^2)} dx = 4\sqrt{2}\ [\operatorname{artanh}(x)]_0^1 = \infty.$$

Integrale dieser Art sind mit Computeralgebrasystemen numerisch problemlos genau auswertbar. So liefert MATLAB für $E = 0{,}2$ den Wert 8,300 54.

5. Coulombdämpfung

Wir betrachten nun einige Fälle nichtgeschwindigkeitsproportionaler Dämpfung und beginnen mit der sogenannten Coulombschen Dämpfung, also mit dem Fall, in dem die Reibungskraft nur von der Richtung der Geschwindigkeit, nicht aber von ihrer Größe abhängt. Dabei ist der Betrag der Reibungskraft gleich μmg. Wir erhalten die Gleichungen

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} -\mu mg & \text{für} \quad \dot{x} > 0, \\ \mu mg & \text{für} \quad \dot{x} < 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

Nach Division durch m bekommen wir Gleichungen der Gestalt

$$\ddot{x} + \omega_k^2 x = \begin{cases} -\mu g & \text{für} \quad \dot{x} > 0, \\ \mu g & \text{für} \quad \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Nun bestimmen wir Vorintegrale, indem wir zunächst durch Multiplikation mit $2\dot{x}/\omega_k^2$ erweitern.

$$\frac{2\dot{x}\ddot{x}}{\omega_k^2} + 2\dot{x}x = \begin{cases} -2\dot{x}\mu g/\omega_k^2, & \text{für} \quad \dot{x} > 0, \\ 2\dot{x}\mu g/\omega_k^2 & \text{für} \quad \dot{x} < 0, \end{cases}$$

Durch darauffolgende Integration und kleine Umformungen erhalten wir daraus

$$\begin{array}{rcrcll} \left(\frac{\dot{x}}{\omega_k}\right)^2 & + & \left(x + \frac{\mu g}{\omega_k^2}\right)^2 & = & r_1^2 & \text{für} \quad \dot{x} > 0 \text{ und} \\ \left(\frac{\dot{x}}{\omega_k}\right)^2 & + & \left(x - \frac{\mu g}{\omega_k^2}\right)^2 & = & r_2^2 & \text{für} \quad \dot{x} < 0. \end{array}$$

Trägt man $\dot{x}/\omega_k$ über x auf, so sind das Kreise in der oberen Halbebene mit dem Mittelpunkt $(-\mu g/\omega_k^2, 0) = (-\mu mg/k, 0)$ und Kreise in der unteren Halbebene mit dem Mittelpunkt $(\mu mg/k, 0)$. Dieses Phasenportrait zeigt Abbildung 5.4.
Angenommen die Masse habe zum Zeitpunkt t_0 die Auslenkung $x_0 > \mu mg/k = \mu g/\omega_k^2$. Dann ist die Federkraft größer als die Reibungskraft und die Masse beginnt sich in Richtung Ursprung zu bewegen. Im Phasenraumdiagramm entspricht das einer Bewegung auf dem Halbkreis in der unteren Halbebene. Der nächste Schnittpunkt mit der x-Achse ist bei $x_1 = -x_0 + 2\mu mg/k$. Ist $|x_1| > \mu mg/k$, so beginnt sich die Masse in der anderen Richtung in Bewegung zu setzen und trifft bei $x_2 = x_0 - 4\mu mg/k$ wieder auf die x-Achse.
Wir haben es also mit einer Schwingung zu tun, bei der die Amplitude bei jedem Halbzyklus um $2\mu mg/k$ abnimmt, unabhängig vom Betrag der jeweiligen Amplitude. Wird dieser Betrag kleiner als $\mu mg/k$, so kommt die Bewegung zum Stillstand.
Aus der Beziehung (5.14) ist ersichtlich, dass es sich immer um eine Schwingung der Kreisfrequenz $\omega_k = \sqrt{k/m}$ handelt, und zwar unabhängig vom Reibungsbeiwert μ.

Beispiel 5.4. Gegen sei das System von Abbildung 5.5. Die Masse werde 10 mm weit ausgelenkt. Wieviele Zyklen durchläuft das System bevor es zur Ruhe kommt?

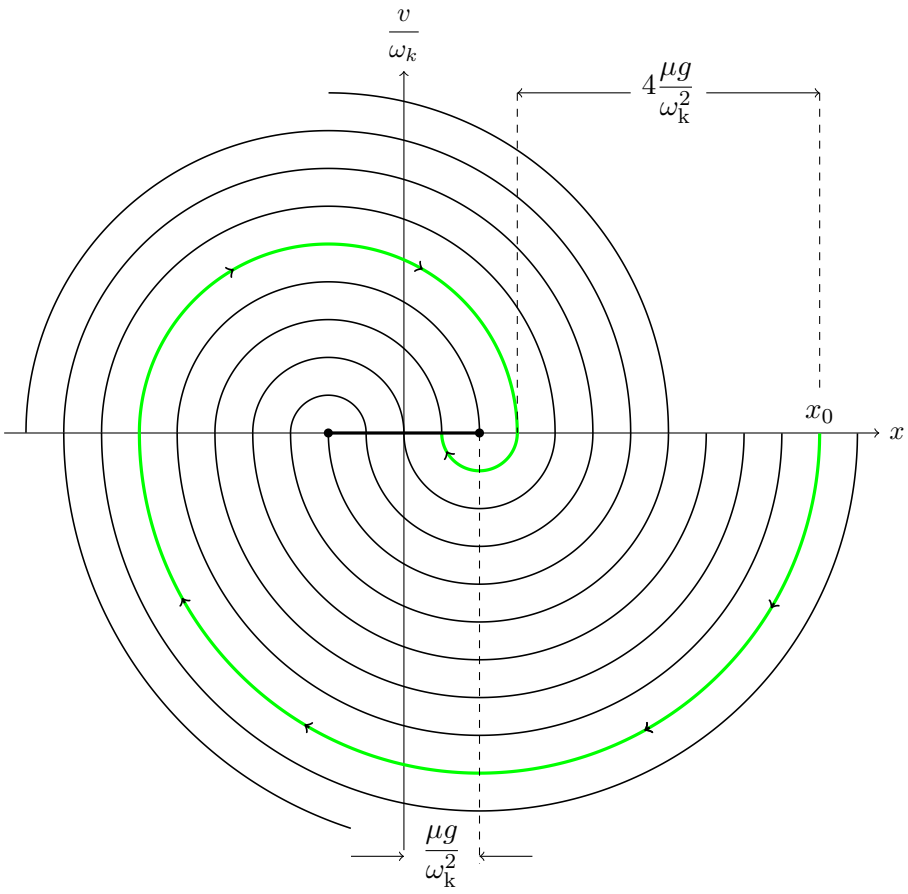


ABBILDUNG 5.4. Phasenportät für das System (5.14), Schwingung mit Coulombscher Reibung. Die Bahnen setzen sich aus Halbkreisen abwechselnd um einen der beiden Mittelpunkte zusammen. Sie verlaufen im Uhrzeigersinn spiralförmig nach innen und enden auf der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte. Für den Anfangszustand $x = x_0,\ v = 0$ markieren Richtungspfeile den Verlauf. Eingezeichnet ist für diese Bahn auch: nach einem Umlauf hat sich die Auslenkung um $4\frac{\mu g}{\omega_k}$ verringert.

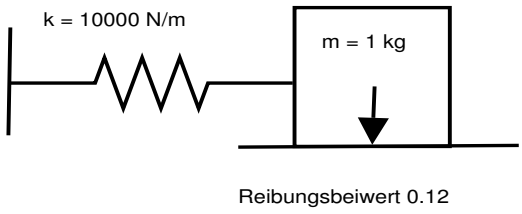


ABBILDUNG 5.5. Coulombreibung

LÖSUNG. Pro Zyklus nimmt die Amplitude um

$$\Delta A = \frac{4\mu mg}{k} = \frac{4 \times 0.12 \times 1kg \times 9.81m/s^2}{10000\,N/m} = 0.47\,mm$$

ab. Die Bewegung endet, wenn die Federkraft die Reibungskraft nicht mehr übertrifft, also wenn die Auslenkung kleiner als $x_r = \mu mg/c = 0.118\,mm$ ist. Die Anzahl n der Zyklen ist also größer als

$$\frac{10\,mm - x_r}{\Delta A} = \frac{10\,mm - 0.118\,mm}{0.47\,mm} = 21.02.$$

Die Masse kommt also nach $21\frac{1}{2}$ Zyklen zum Stillstand. ■

Wir vermerken noch drei Hauptunterschiede zwischen Coulombdämpfung und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung:

(1) Die Frequenz der Schwingung ist unabhängig von der Stärke der Reibungskraft, ganz im Gegensatz zum Fall der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung, bei der die Frequenz $\omega_D = \omega_k \sqrt{1 - D^2}$ vom Dämpfungsgrad abhängt.
(2) Die Amplitude der Schwingungen nimmt unabhängig von der Größe der Amplitude bei jedem Zyklus um den gleichen Betrag ab, während die Abnahme bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung exponentiell ist.
(3) Bei der Coulombdämpfung kommt die Bewegung nach endlicher Zeit zum Stillstand. Im Gegensatz kommt die Bewegung bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung nie ganz zum Stillstand.

AUFGABE 5.1. *Ein Körper mit einer Masse von* 100 kg *gleite mit Coulombscher Dämpfung auf einer mit* 10° *geneigten schiefen Ebene und ist, ähnlich wie bei Beispiel 5.4 durch eine Feder gestützt. (Man stelle sich Abbildung 5.5 um* 10° *geneigt vor.) Die Federkonstante sei* $15\,000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.
Man bringt die Masse um 30 mm *aus der Ruhelage und beobachtet eine Amplitudenverminderung von* 1,1 mm *bei jedem Zyklus. Wie groß ist der Reibungsbeiwert?*

6. Reibschwinger

Beim REIBSCHWINGER gehen wir von der in Figur 5.6 dargestellten, idealisierten Situation aus. Für $x = 0$ seien Federkraft und Reibungskraft μmg im Gleichgewicht. Es besteht also die nach links gerichtete Federvorspannungskraft

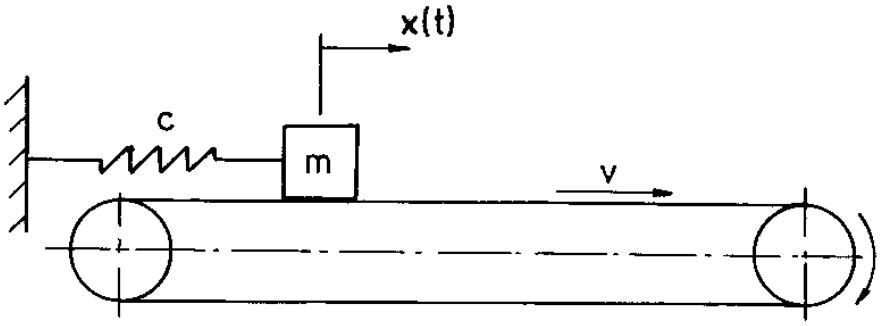


ABBILDUNG 5.6. Reibschwinger

$$k_0 = \mu m g.$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

(a) m ist schneller als das Band ($\dot{x} > v$). Die Reibungskraft ist nach links gerichtet und

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= -k_0 - \mu m g \\ &= -2\mu m g. \end{aligned}$$

(b) m ist langsamer als das Band ($\dot{x} < v$). Die Reibungskraft ist nach rechts gerichtet und

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= -k_0 + \mu m g \\ &= 0. \end{aligned}$$

(c) m ist gleich schnell wie das Band ($\dot{x} = v$).

$$-2\mu m g \le kx \le 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2\mu m g}{k} \le x \le 0.$$

Wir bestimmen zunächst ein Vorintegral für (a) und (b).

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} -2\mu m g & \text{für} \quad \dot{x} > v, \\ 0 & \text{für} \quad \dot{x} < v. \end{cases}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \begin{cases} -2\mu g & \text{für} \quad \dot{x} > v, \\ 0 & \text{für} \quad \dot{x} < v. \end{cases}$$

Multiplikation mit $2\dot{x}/\omega^2$ ergibt

$$\frac{2\dot{x}\ddot{x}}{\omega^2} + 2\dot{x}x = \begin{cases} -4\dot{x}\mu g/\omega^2, & \text{für} \quad \dot{x} > v, \\ 0 & \text{für} \quad \dot{x} < v, \end{cases}$$

also mit Integration (r_1 und r_2 sind Integrationskonstanten und lassen sich zugleich als Radien in einer Kreisgleichung interpretieren!)

$$\left(\tfrac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + \left(x + \tfrac{2\mu g}{\omega^2}\right)^2 = r_1^2 \quad \text{für} \quad \dot{x} > v$$

$$\left(\tfrac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + x^2 = r_2^2 \quad \text{für} \quad \dot{x} < v.$$

Im $\left(x, \frac{\dot{x}}{\omega}\right)$-Diagramm erhalten wir für den ersten Fall Stücke von Kreisen mit dem Mittelpunkt $(-\frac{2\mu g}{\omega^2}, 0)$ und Radius r_1, wobei $\frac{\dot{x}}{\omega^2} > \frac{v}{\omega}$ sein muss, im zweiten Fall sind die Kurven Kreise, bzw. Teile von Kreisen, mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r_2.
Im Fall (c) erhalten wir die Strecke von $(-\frac{2\mu g}{\omega^2}, \frac{v}{\omega})$ bis $(0, \frac{v}{\omega})$.
Ruhepunkte (Singuläre Punkte) gibt es für $x \equiv k$, also $\dot{x} \equiv 0$. Dann ist $\dot{x} < v$, also haben wir Fall (b). Wegen $\ddot{x} = 0$ folgt daraus

$$cx = 0,$$

also $x = 0$. Damit ist $(0,0)$ der einzige Ruhepunkt (singuläre Punkt). Die Lösungen durch diesen Punkt genügen

$$\left(\frac{0}{\omega}\right)^2 + 0^2 = r_2^2.$$

Damit ist $r_2 = 0$ und wir haben nur die Punktlösung $(0,0)$.

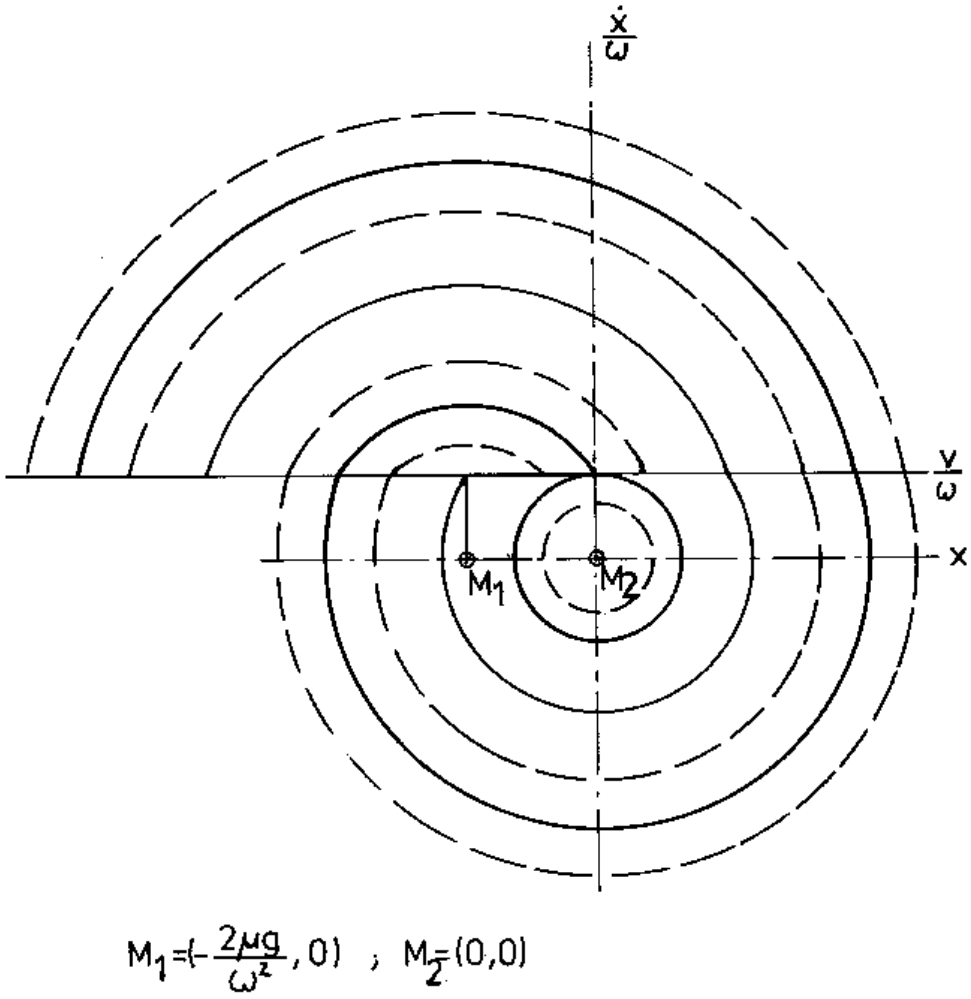


Abbildung 5.7.

Das Phasenraumdiagramm ist in Figur 5.7 dargestellt. Man entnimmt dem Diagramm, dass alle Anfangsbedingungen in harmonische Schwingungen der Frequenz ω um die Ruhelage $x = 0$ überführen. Mit C_1 bezeichnen wir den Kreis um M_2 mit Radius v/ω. Ist die Anfangslage außerhalb von C_1 oder auf C_1, so liegt die Bahn letztlich in C_1. Ansonsten gibt es von Anfang an eine harmonische Schwingung.
Beachtet man, dass μ mit wachsender Differenzgeschwindigkeit $|\dot{x}-v|$ fällt, so ist C_1 kein Kreis mehr, aber noch eine geschlossene Kurve, die eine periodische Lösung gibt, und die Kurven innerhalb von C_1 sind nach außen gerichtete Spiralen, die sich C_1 nähern. Wir haben es dann mit einer aus Haften und Gleiten zusammengesetzten SELBSTERREGTEN SCHWINGUNG zu tun. (Bei solchen Schwingungen wird die notwendige Energie von außen zugeführt.) Dieses Phänomen ist als Quietschen von Kreide an der Tafel, dem Quietschen der Straßen- und Eisenbahn und dem Rattern von Maschinen wohlbekannt.

AUFGABE 5.2. *Ein Mopedmotor wird durch die Massenkräfte seines Kurbeltriebs von innen zu Schwingungen erregt. Ist n die Motordrehzahl, so gilt angenähert für die Vibration $x(t)$:*

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + k^2 x = A\omega^2 \left(\cos(\omega t) + \tfrac{1}{4}\cos(2\omega t)\right)$$

mit $\omega = 2\pi n$ und $k = 4d = 240\,\mathrm{s}^{-1}$.

a) Welche Eigenfrequenz ω_1 hat die Motoraufhängung? (Man setze $A = 0$!)

b) In welchem Drehzahlbereich läuft das Moped besonders rauh? Setzen Sie dazu

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

berechnen Sie A_1 und A_2 und bestimmen Sie die n, für welche A_1 beziehungsweise A_2 maximal werden. Weiters bestimmen Sie den Drehzahlbereich für welchen $\sqrt{A_1^2 + A_2^2} > 2A$ gilt.

KAPITEL 6

Schwingungen von Kontinua

1. Einführung

Bis jetzt haben wir Systeme betrachtet, die aus einzelnen Komponenten (Massen) bestanden. Hier betrachten wir Systeme mit *kontinuierlicher* Masseverteilung. Diese werden nicht mehr durch gewöhnliche, sondern durch *partielle* Differentialgleichungen beschrieben. Zusätzlich zur Zeitabhängigkeit kommt die Abhängigkeit vom Ort hinzu. Fasst man die Bewegung eines kleinen Massepunktes als Freiheitsgrad auf, so besitzt ein kontinuierliches System unendlich viele Freiheitsgrade mit unendlich vielen Eigenschwingungsformen und Eigenfrequenzen.
In der Praxis sind in erster Linie die 'Grundschwingung', d.h. die erste Eigenfrequenz, die nächste Größere, die erste 'Oberschwingung', und vielleicht noch die nächste interessant.
Wir werden hier als erstes die Schwingung einer Saite, dann die Längsschwingungen, bzw. die Torsionsschwingungen einen Stabes kennenlernen. Danach werden wir Balkenschwingungen betrachten.
Bei Kontinuumsschwingen ist es wichtig wie die Saite, der Stab, bzw. der Balken am Rand verankert sind. Dass heißt ob z.B. ein Balken rechts und links fix eingespannt ist, frei schwingt oder elastisch montiert ist.

2. Wellengleichung

Bevor wir uns an die konkreten Beispiele vorwagen, wollen wir die allgemeine Wellengleichung herleiten. Dabei verwenden wir drei Varianten. Die erste ist eine Verallgemeinerung von Mehrkörpersystemen aus Kapitel 4. Dabei betrachten wir Longitudinalwellen. Das sind Wellen bei denen die Schwingung in Ausbreitungsrichtung stattfindet. Ein klassisches Beispiel sind Schallwellen. In der zweiten Herleitung beschäftigen wir uns mit Transversalwellen. Genauer gesagt, wollen wir die Wellengleichung für eine schwingende Saite herleiten. Die dritte Herleitung ist eine Verallgemeinerung der beiden vorhergehenden auf höhere Dimensionen. Dazu benötigen wir den Satz von Stockes.

2.1. Longitudinalwellen. Wir zerlegen unser System in N Massen m, die über Federn mit Steifigkeit k verbunden sind. Wenn das ganze System die Länge L besitzt, dann erhalten wir als Abstände $h = \frac{L}{N}$. Wir erhalten die Abbildung 6.1.

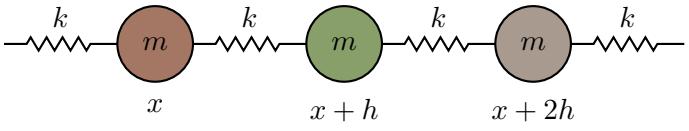


Abbildung 6.1. Ausschnitt

Wir nehmen an, dass $u(x,t)$ die Auslenkung der Masse an der Stelle x zum Zeitpunkt t beschreibt und das diese nur in Längsrichtung passiert. Es gilt einerseits die Rückstellkraft

$$F_{\text{Hooke}} = k\left[u(x+2h,t) - u(x+h,t)\right] - k\left[u(x+h,t) - u(x,t)\right]$$

und andererseits die Beschleunigungskraft

$$F_{\text{Newton}} = ma(t) = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x+h,t).$$

Nach dem dritten Newtonschen Gesetz müssen diese Kräfte gleich sein:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x+h,t) = \frac{k}{m}\left[u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) + u(x,t)\right].$$

Die Idee ist nun ein Grenzübergang $N \to \infty$. Dazu setzen wir $L = N \cdot h$, $M = N \cdot m$ und $K = \frac{k}{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x+h,t) &= \frac{KL^2}{M}\,\frac{u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) + u(x,t)}{h^2}\\ &= \frac{KL^2}{M}\,\frac{\frac{u(x+2h,t)-u(x+h,t)}{h} - \frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}}{h}.\end{aligned}$$

Im Grenzübergang $h \to 0$ (welcher $N \to \infty$ entspricht) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2.2. Transversalwellen. Wir nehmen an, dass $u(x,t)$ den Ausschlag des Punktes x einer Saite zum Zeitpunkt t beschreibt. Dann betrachten wir ein kleines Stück im Interval $[x, x+h]$ und nehmen an, dass die Spannung in x durch die Funktion S gegeben ist (siehe Abbildung 6.2).

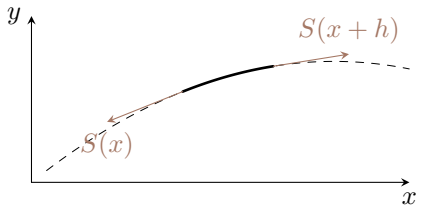


Abbildung 6.2. Spannung einer Saite

Für ein kleines Stück der Länge h erhalten wir die Masse $\Delta m = \rho h$. Analog zu oben erhalten wir die Beschleunigungskraft:

$$F_{\text{Newton}} = \Delta m a(t) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Sei der Ausschlag bezüglich der Länge der Saite so klein, dass die Spannung in x-Richtung konstant ist, während jene in y-Richtung variiert. Dann erhalten wir in x-Richtung

$$S(x)\cos(\alpha) = S(x+h)\cos(\beta) = \sigma = \text{konstant}, \tag{6.1}$$

wobei $S(x)$ die Spannkraft im Punkt x angibt. Analog erhalten wir in y-Richtung

$$S(x+h)\sin(\beta) - S(x)\sin(\alpha) = F_y = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{6.2}$$

Division von (6.2) durch (6.1) ergibt

$$\frac{S(x+h)\sin(\beta)}{S(x+h)\cos(\beta)} - \frac{S(x)\sin(\alpha)}{S(x)\cos(\alpha)} = \tan(\beta) - \tan(\alpha) = \frac{\rho}{\sigma} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Wegen der ähnlichen Dreiecke gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}(x) \quad \text{und} \quad \tan(\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x+h).$$

Damit folgt, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+h) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{\rho}{\sigma} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Wir dividieren schließlich durch h und erhalten im Grenzübergang $h \to 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

wobei ρ die lineare Massendichte (in kg/m) und σ die Spannung (in N) der Saite ist. Die Dimension des Bruchs $\frac{\rho}{\sigma}$ ist $\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2$ und (wie wir unten sehen werden) das Quadrat der Ausbreitungsgeschwindigkeit c.

2.3. Wellen in einem idealen Gas. Bevor wir uns der allgemeinen Wellengleichung widmen, wollen wir diese in drei Dimensionen betrachten. Dazu stellen wir uns ein ideales Gas vor, mit Dichte ρ, Geschwindigkeit v und Druck p. Dann wird die Bewegung dieses Gases von drei Gesetzen (Gleichungen) bestimmt.

1. *Kontinuitätsgleichung.* Wegen der Massenerhaltung ist die Änderung der Masse in einem Raum V gleich dem Fluss über die Oberfläche. Anders gesagt, es kann nur Masse von außen hinzugefügt oder entfernt werden. Dieser Fluss über die Oberfläche ist

$$\int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S \,,$$

wobei ∂V die Oberfläche (der Rand) von V, $\vec{n}$ ein Normalenelement der Oberfläche und $\mathrm{d}S$ ein infinitesimal kleines Flächenelement ist. Mit dem Gauß'schen Integralsatz folgt dann

$$\int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \int_V \rho \, \mathrm{div}\,(\vec{v}) \, \mathrm{d}x \,.$$

Die KONTINUITÄTSGLEICHUNG besagt nun, dass die zeitliche Veränderung der Dichte dem Fluss durch die Oberfläche entspricht. Das heißt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \, \mathrm{div}\,(\vec{v}) \,.$$

2. *Newtonsches Gesetz.* Der Druckgradient induziert ein Kraftfeld, das eine Beschleunigung der Teilchen bewirkt. Wir haben sozusagen

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\operatorname{grad}(p).$$

3. *Zustandsgleichung.* In idealen Gasen ist der Druck bei konstanter Temperatur proportional zur Dichte:

$$p = c^2 \rho.$$

Aus diesen drei Gesetzen können wir nun folgern, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,p = c^2\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} &= -c^2\frac{\partial}{\partial t}\rho_0\,\mathrm{div}\,(v) = -c^2\,\mathrm{div}\left(\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\ &= c^2\,\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}(p)) = c^2\Delta p.\end{aligned}$$

2.4. Allgemeine Wellengleichung. Das Bild der schwingenden Saite liefert uns eine Möglichkeit, wie wir die Wellengleichung auf höhere Dimensionen verallgemeinern können. Sei also $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilgebiet des $\mathbb{R}^n$. Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Dichte ρ von V ist 1. Dann ergibt sich die Beschleunigungskraft als

$$F_{\text{Newton}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_V u(\mathbf{x},t)\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,(\mathbf{x},t)\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Dem gegenüber greift eine SSpannungskraftän der Oberfläche an. Wir erhalten somit

$$F_{\text{Spannung}} = -\int_{\partial V}\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S,$$

wobei ∂V die Oberfläche von V, $\vec{n}$ der Normalvektor aus V heraus und $\mathrm{d}S$ ein infinitesimal kleines Oberflächenelement ist.
Nun ist das eine Integral über V und das andere über ∂V bestimmt. Daher wollen wir den Satz von Stokes (als Satz von Gauss in $\mathbb{R}^3$ bekannt) verwenden, um diese Integral wie folgt umzuschreiben:

$$\int_{\partial V}\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}(\vec{F})\mathrm{d}\mathbf{x},$$

wobei div die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}$ darstellt. Nach dem dritten Newtonschen Gesetz erhalten wir also

$$\int_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,(\mathbf{x},t)\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_V \mathrm{div}(\vec{F})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Für elastische Körper gilt, dass die Kraft $\vec{F}$ in erster Näherung proportional zum Gradienten ist. Daher

$$\vec{F} \approx -a\cdot\mathrm{grad}(u).$$

Es folgt somit

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \mathrm{div}\,(-a\cdot\mathrm{grad}(u)) = -a\Delta u,$$

wobei Δ der Laplace-Operator ist. Schließlich erhalten wir

$$\int_V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\Delta u\right)\mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\Delta u = 0.$$

Nachdem die Wellengleichung oft auch D'Alembert-Gleichung genannt wird, heißt der Differentialoperator

$$\Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

D'Alembert-Operator. In dieser Schreibweise ist die Wellengleichung einfach $\Box u = 0$.

3. Schwingung einer Saite oder eines Kabels

Telegraphenleitungen, oder auch Stromleitungen, die über Strommasten miteinander verbunden sind, genügen derselben Gleichung wie eine Gitarrensaite.

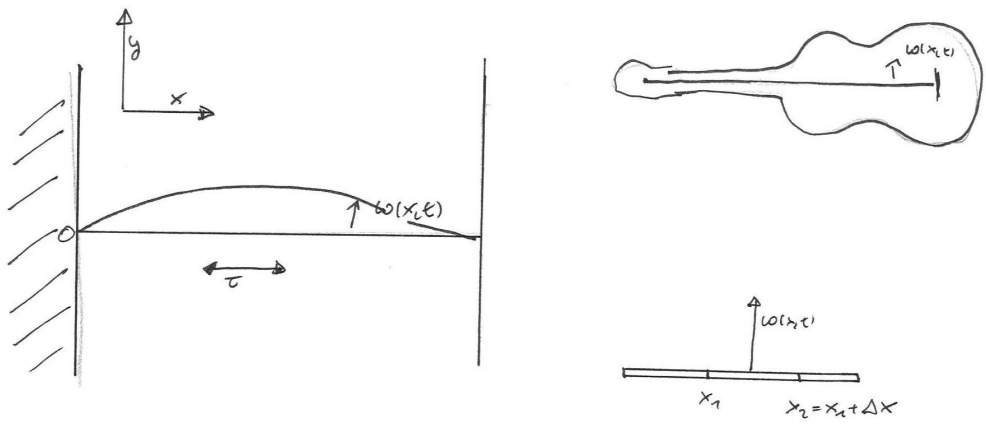


ABBILDUNG 6.3. Schematische Darstellung einer Gitarrensaite.

3.1. Eine Gitarrensaite.

AUFGABE 6.1. *Eine Gitarrensaite der Länge l ist auf der rechten und linken Seite fixiert. Gesucht ist eine Funktion w, wobei $w(x,t)$ die transversale Auslenkung aus der Ruhelage an der Stelle $x \in [0,\ell]$ und zur Zeit $t \geq 0$ angibt. Wie schaut die Lösungsfunktion aus, falls die Saite angezupft wird.*

Physikalische Größen

- ρ Dichte;
- A Querschnittsfläche der Saite;
- τ Spannkraft.

Die Gleichung: Die Gleichung für $w : [0,\ell] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lautet ($c^2 = \tau/(\rho A)$):

$$c^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}, \quad (x,t) \in (0,\ell) \times [0,\infty). \tag{6.3}$$

Da die Gitarrensaite rechts und links fest eingespannt ist, kommen noch folgende Randbedingungen hinzu:

$$(i) \quad w(0,t) = 0, \quad \text{und} \quad (ii) \quad w(\ell,t) = 0, \quad t \geq 0; \tag{6.4}$$

Die Ansatzfunktion: Im Ansatz nach Bernoulli geht man davon aus, dass die Lösungsfunktion sich auf folgende Weise darstellen lässt: $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Setzt man diese Ansatzfunktion in (6.3) ein erhält man

$$c^2 X''(x) T(t) = \ddot{T}(t) X(x),$$

bzw.

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}.$$

Die rechte Seite hängt nicht von x ab; dann kann aber auch die linke Seite nicht von x abhängen. Und von t hängt die linke Seite auch nicht ab — die einzige Möglichkeit, die noch bleibt, ist: beide Seiten sind konstant. Den Wert der Konstanten werden wir noch genauer

bestimmen. Einstweilen bezeichnen wir sie mit $-\omega^2$. (Es wird sich gleich herausstellen, dass diese Bezeichnung günstig gewählt ist, weil ω tatsächlich die Kreisfrequenz der Schwingung sein wird.)
Es gilt also

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \text{konstant} = -\omega^2,$$

Daher gelten für X und T jeweils die Gleichungen

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad . \tag{6.5}$$

Beide Gleichungen entsprechen dem Typ der Gleichung einer freien Schwingung. Wir wissen von früher oder können sofort nachprüfen: Basislösungen sind

$$X(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \\ \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad T(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{cases}$$

Die Lösung für X: Unterschiede bei der X-Gleichung im Vergleich zur Schwingungsgleichung sind:

- Die Funktion X hängt von x, nicht von t ab.
- Die Ableitungen X'' erfolgen nach x, nicht nach t.
- Bei der Schwingungsgleichung waren Position und Geschwindigkeit für $t = 0$ als Anfangsbedingungen festgelegt. Hier sind *zwei* Positionen, $X(0)$ und $X(\ell)$, durch die Einspannung als Randbedingungen vorgegeben.
- Die Rolle von ω in der Schwingungsgleichung übernimmt hier ω/c. Der Term im Argument der Winkelfunktionen ist statt ωt hier $\left(\frac{\omega}{c}x\right)$. Er ist wie ωt dimensionslos, und das ist für Argumente von Winkelfunktionen bekanntlich notwendig.

Die allgemeine Lösung für X ist eine Linearkombination der Basislösungen:

$$X(x) \quad = \quad a_1 \sin\Big(\frac{\omega x}{c}\Big) + a_2 \cos\Big(\frac{\omega x}{c}\Big), \quad x \in [0, \ell]. \tag{6.6}$$

Die Koeffizienten a_1 und a_2 und ω sind noch zu bestimmen. Die Funktion X eingesetzt in die Randbedingung (6.4)-(i) ergibt

$$X(0) = 0 = a_1 \sin\Big(\frac{\omega}{c}0\Big) + a_2 \cos\Big(\frac{\omega}{c}0\Big); \quad \Rightarrow a_2 = 0,\ a_1 \text{ und } \omega \text{ sind frei wählbar.}$$

Die Funktion X eingesetzt in die Randbedingung (6.4)-(ii) ergibt

$$\begin{aligned} X(\ell) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1 \sin\Big(\frac{\omega}{c}\ell\Big) + a_2 \cos\Big(\frac{\omega}{c}\ell\Big) = 0 \quad \Rightarrow \\ a_1 \sin\Big(\frac{\omega}{c}\ell\Big) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin\Big(\frac{\omega}{c}\ell\Big) = 0 \Rightarrow \\ \text{Lösungsmenge:} \qquad & \mathcal{L} = \Big\{\omega_n = \frac{cn\pi}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}_0\Big\}. \end{aligned}$$

Hier erhalten wir nicht nur eine Lösung für ω, sondern viele verschiedene Lösungen - genau genommen abzählbare viele. Diese Lösungen haben wir nummeriert und in der Lösungsmenge

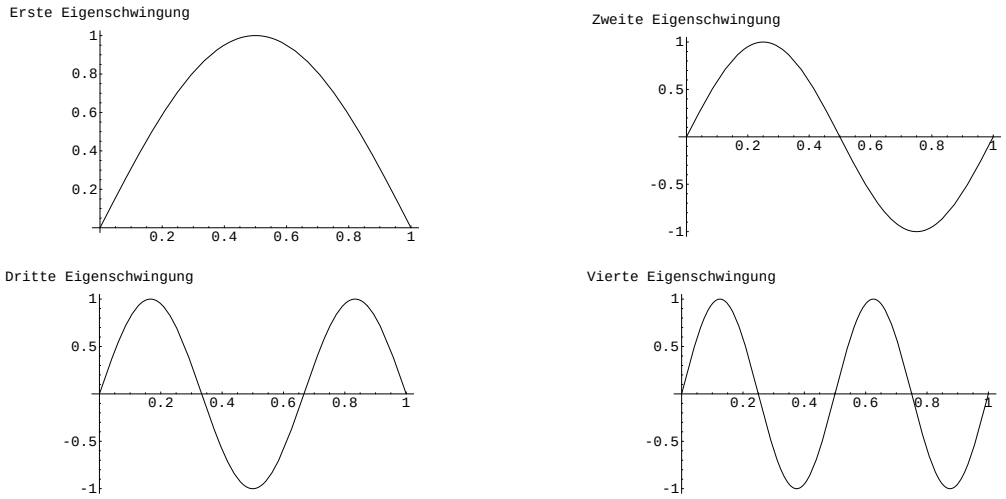


ABBILDUNG 6.4. Die einzelnen Eigenschwingungen (Moden).

$\mathcal{L}$ zusammengefasst. Setzt man z.B. ω_1 in die allgemein Gleichung (6.6) für X ein und berücksichtigt dass $a_2 = 0$ ist, so erhält man eine Funktion X_1 die wie folgt ausschaut

$$X_1(x) = a_1^1 \sin\Big(\omega_1 \frac{x}{c}\Big), \quad x \in [0, \ell].$$

(Wir bezeichnen hier mit a_1^1 bzw. mit a_1^n den ersten, bzw. n-ten Index. Es ist also „hoch 1“ oder „hoch n“ kein Exponent.) In gleicher Weise kann man ω_n in die allgemeine Gleichung (6.6) für X einsetzten, und erhält so eine Funktion X_n die wie folgt aussieht

$$X_n(x) = a_1^n \sin\Big(\omega_n \frac{x}{c}\Big), \quad x \in [0, \ell].$$

Das heißt für jedes ω_n erhält man eine Funktion X_n, die sogenannte Eigenfunktion. In der Bildserie 6.4 sind die ersten vier Eigenfunktionen (auch Moden genannt) dargestellt.

Die Lösung von T. Als nächsten Punkt gilt es eine Lösung für T zu finden. Da wir nicht eine einzige Lösung der Eigenfrequenz erhalten sondern die Lösungsmenge $\mathcal{L}$, müssen wir für jedes ω_n eine Gleichung für T aufstellen. Genau gesagt erhalten wir für jedes n ein Lösung die wir mit T_n bezeichnen. Sei also $w_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$. Setzt man $w_n(x,t)$ in die Gleichung (6.3) ein, so erhält man

$$c^2 \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} T_n(t) \quad = \quad \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} X_n(x), \quad (x,t) \in (0,\ell) \times [0,\infty),$$

bzw.

$$c^2 X_n''(x) T_n(t) \quad = \quad \ddot{T}_n(t) X_n(x), \quad (x,t) \in (0,\ell) \times [0,\infty).$$

Dividiert man obige Gleichung durch T_n und X_n erhält man

$$c^2 \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}, \quad (x,t) \in (0,\ell) \times [0,\infty).$$

Die Funktion X_n kennen wir ja schon und wir können X_n oben auf der rechten Seite einsetzen und erhalten

$$c^2 \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = -\omega_n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit löst T_n folgende Gleichung

$$\ddot{T_n}(t) + \omega_n^2 T_n(t) \quad = \quad 0.$$

Die allgemeine Lösung für T_n lautet also

$$T_n(t) \quad = \quad A_1 \sin(\omega_n t) + A_2 \cos(\omega_n t), \quad t \geq 0.$$

Allgemeine Form der Gesamtlösung: Um die Gesamtlösung zu finden müssen wir die einzelnen Lösungen aufsummieren. Wir erhalten also

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\Big(\frac{\omega_n}{c} x\Big) \left(A_1^n \sin(\omega_n t) + A_2^n \cos(\omega_n t)\right), \quad t \geq 0,\, 0 \leq x \leq \ell.$$

Berechnung der Koeffizienten A_1^n und A_2^n mittels den Anfangsbedingungen: Die Saite wird angezupft. Damit lautet die Anfangsbedingung:

$$w_0(x) = \begin{cases} \frac{2}{\ell} h x, & 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}, \\ \frac{2}{\ell}(\ell - x) h, & \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell. \end{cases} \tag{6.7}$$

und

$$\dot{w}(x,0) = 0. \tag{6.8}$$

Damit folgt aus der Orthogonalitätsrelation der Eigenfunktionen, d.h.

$$\int_0^\ell \sin(\omega_n x) \sin(\omega_m x)\, dx \quad = \quad \begin{cases} \frac{\ell}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^\ell \cos(\omega_n x) \cos(\omega_m x)\, dx \quad = \quad \begin{cases} \frac{\ell}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

folgendes

$$\begin{aligned} \int_0^\ell w(x,0)\, \sin(\omega_m x)\, dx \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_2^n \underbrace{\int_0^\ell \sin\left(\omega_n x\right) \sin(\omega_m x)\, dx}_{= \frac{\ell}{2}\, \delta_{m,n}} \\ &= \quad A_2^m \, \frac{\ell}{2}\,. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} A_2^n \quad &= \quad \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \sin(\omega_n x) w_0(x)\, dx \\ &= \quad h \frac{2}{\ell} \left(\int_0^{\frac{\ell}{2}} \sin(\omega_n x) x\, dx + h \frac{2}{\ell} \int_{\frac{\ell}{2}}^\ell \sin(\omega_n x)(\ell - x)\, dx \right) \\ &= \quad \frac{8}{\omega_n^2} \frac{2h}{\ell} \left\{ \cos\left(\frac{\ell \omega_n}{4}\right) \sin^3\left(\frac{l \omega_n}{4}\right) \right\} \end{aligned}$$

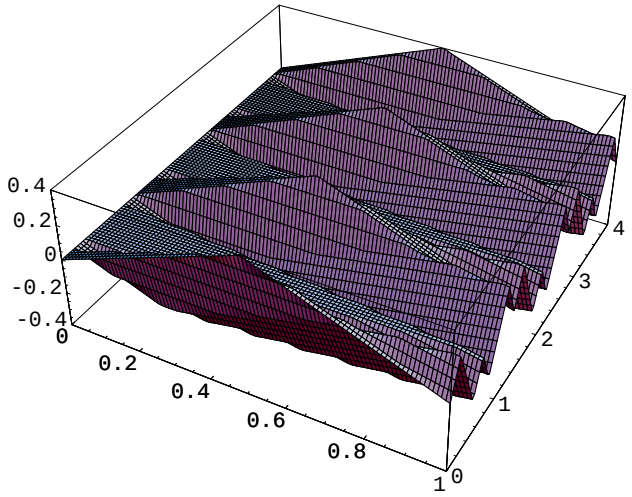


ABBILDUNG 6.5. Die Gesamtlösung.

und $A_1^n = 0$. Das heißt, in unseren Fall wo die Gitarrensaite angezupft wird, also die Anfangsbedingungen (6.7) und (6.8) erfüllt, erhalten wir als Lösung

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_2^n \sin(\omega_n x)\cos(\omega_n c t), \quad t \geq 0, 0 \leq x \leq \ell,$$

wobei gilt:

$$A_2^n = \frac{8}{\omega_n^2}\frac{2h}{\ell}\left\{\cos\left(\frac{\ell\omega_n}{4}\right)\sin^3\left(\frac{\ell\omega_n}{4}\right)\right\}.$$

Die Gesamtlösung mit Werten $\ell = 1$, $c = 1$, $h = 0.2$ ist im Bild 6.5 dargestellt.

3.2. Eine schwingende Saite. Wir haben im vorigen Beispiel gesehen, dass die Eigenfrequenzen durch die Randbedingungen (6.4)-(i) und (ii) berechnet wurden. Hier kann man sich die Frage stellen, in wie weit die Eigenfrequenzen von den Randbedingungen abhängen. Dies zu illustrieren dient das nächste Beispiel.

AUFGABE 6.2. *Am linken Rand ist eine Saite der Länge l fixiert. Weiters gleitet die Saite am rechten Rand reibungsfrei und ist nach oben abgefedert und steht unter Spannung, kann sich aber in der Höhe am rechten Rand verändern. Die Erdanziehungskraft wird nicht berücksichtigt. Berechnen Sie die Schwingungsform der Saite.*

Die Gleichung für $w : [0,\ell] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lautet ($c^2 = \tau/(\rho A)$):

$$c^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}, \quad (x,t) \in (0,\ell) \times [0,\infty)$$

mit Randbedingungen:

- **Linker Rand:**

$$w(0,t) = 0, \quad t \geq 0; \tag{6.9}$$

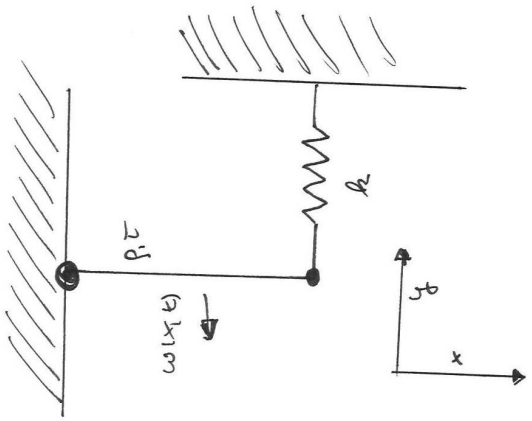


ABBILDUNG 6.6. Eine abgefedert gelagerte Saite.

- **Rechter Rand:**

$$\tau \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = -k\, w(x,t)\Big|_{x=\ell}. \tag{6.10}$$

Ansatzfunktion: $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, wobei X folgende Gleichung löst

$$c^2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) = 0,$$

und T eine Gleichung löst, die noch von X abhängt. Damit erhält man als Lösung für X

$$X(x) = a_1 \sin\Big(\frac{\omega}{c}x\Big) + a_2 \cos\Big(\frac{\omega}{c}x\Big), \quad x \in [0,l].$$

Die Funktion X eingesetzt in die Randbedingung (6.9) ergibt

$$X(0) = 0 = a_1 \sin\Big(\frac{\omega}{c}0\Big) + a_2 \cos\Big(\frac{\omega}{c}0\Big); \quad \Rightarrow a_2 = 0,\ a_1 \text{ und } \omega \text{ sind frei wählbar.}$$

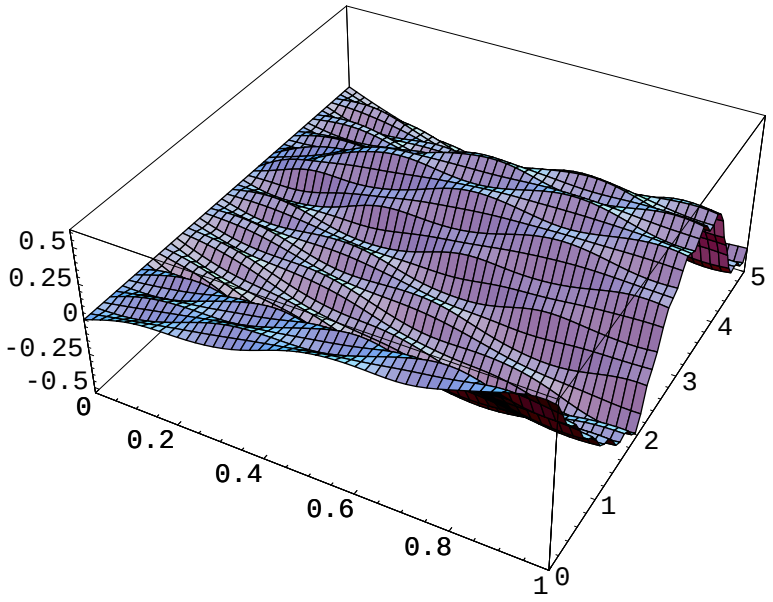
Der Koeffizient a_1 und ω sind noch zu bestimmen. Die Funktion X eingesetzt in die Randbedingung (6.10) ergibt

$$\begin{aligned} \tau X'(\ell) = -kX(\ell) &\Rightarrow a_1 \frac{\omega}{c}\tau \cos\Big(\frac{\omega}{c}\ell\Big) = -k a_1 \sin\Big(\frac{\omega}{c}\ell\Big) \quad \Rightarrow \\ \frac{\omega}{c} = -\frac{k}{\tau}\frac{\sin\big(\frac{\omega}{c}\ell\big)}{\cos\big(\frac{\omega}{c}\ell\big)} &\Rightarrow \frac{\omega}{c} = -\frac{k}{\tau}\tan\Big(\frac{\omega}{c}\ell\Big). \end{aligned}$$

Setzt man $c = 1$ und zeichnet man die Funktionen $x \mapsto \tan(x)$ und $x \mapsto -kx$ auf, so sieht man dass es unendlich viele Lösungen gibt. Ist $\ell = 1$ kann man graphisch folgende Werte für ω herausfinden: $\omega_1 = 1.9$, $\omega_2 = 4.845$, $\omega_3 = 7.936$, $\omega_4 = 11.12$, $\omega_5 = 14.8$, $\omega_6 = 17.32$, $\omega_7 = 20.455$, ... Sei $\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Lösungen der Gleichung

$$\frac{\omega}{c} = -k\tan\Big(\frac{\omega}{c}\ell\Big). \tag{6.11}$$

Funktionen $x \mapsto \tan(x)$ und $x \mapsto -\frac{k}{\tau}x$



Genau wie bei dem Beispiel vorher erhält man für jedes n eine extra Gleichung für T. Das heißt

$$\ddot{T_n}(t) + \omega_n^2 T_n(t) \quad = \quad 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.12}$$

Aus den vorherigen Kapiteln wissen wir das die allgemeine Lösung zu (6.12) folgendermaßen lautet:

$$T_n(t) \quad = \quad b_1^n \sin(\omega_n t) + b_2^n \cos(\omega_n t), \quad t \geq 0.$$

wobei die Koeffizienten $\{b_1^n, b_2^n : n \in \mathbb{N}\}$ noch zu bestimmen sind. Kombiniert man beide Lösungen, lautet die allgemeine Lösung

$$w(x,t) \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(A_1^n \sin(\omega_n t) \sin\Big(\frac{\omega_n x}{c}\Big) + A_2^n \cos(\omega_n t) \sin\Big(\frac{\omega_n x}{c}\Big)\Big)$$

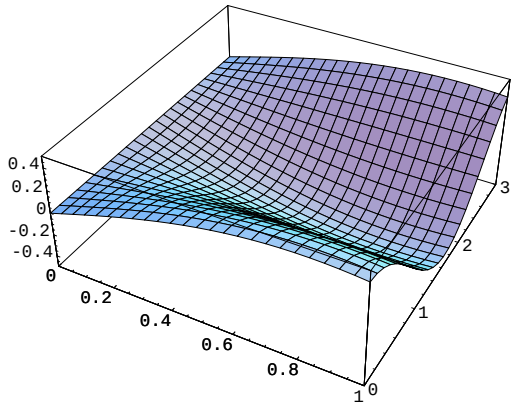
Hier hat man die Unbekannte a_1^n, b_1^n und b_2^n durch die neuen Unbekannten A_1^n und A_2^n ersetzt. Als letzten Punkt muss man noch die Koeffizienten $\{A_1^n, A_2^n : n \in \mathbb{N}\}$ bestimmen. Dies kann man mit Hilfe der Anfangsbedingungen machen. Da am Anfang der Stab gespannt ist und an der Stelle x_0 festgehalten wird, erhalten wir folgende Anfangsbedingungen für w und $\dot{w}$:

$$\begin{aligned} w(x,0) &= w_0(x) = \frac{y}{\ell}\, x, \\ \dot{w}(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

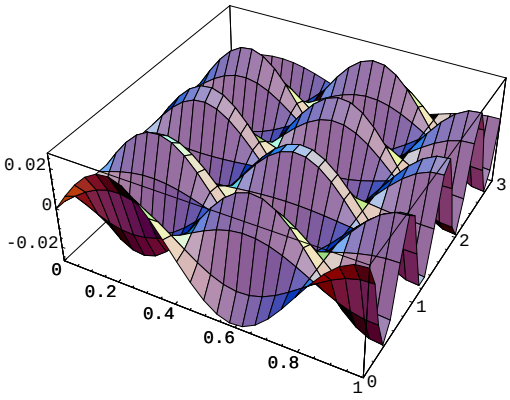
Die Projektion auf die einzelnen Moden ergibt:

$$\begin{aligned} A_2^m &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell w_0(x)\, \sin\Big(\frac{\omega_m x}{c}\Big)\, dx \\ &= \frac{2}{\ell}\frac{y}{\ell}\int_0^\ell x\, \sin\Big(\frac{\omega_m x}{c}\Big)\, dx = c\frac{2}{\ell}\frac{y}{\ell}\frac{\sin\big(\frac{\ell\omega_m}{c}\big) - \ell\omega_m \cos\big(\frac{\ell\omega_m}{c}\big)}{\omega_m^2}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

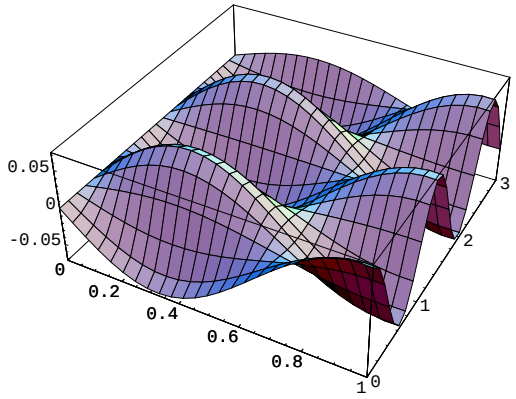
Schwingung des ersten Modes



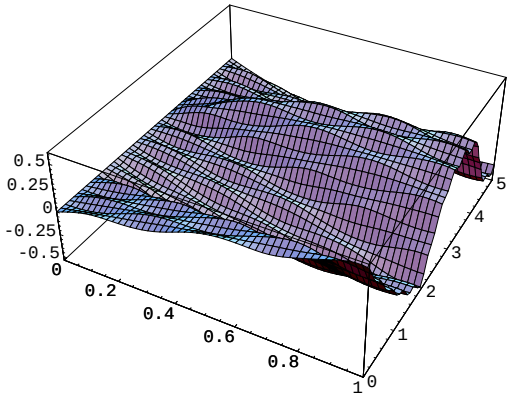
Schwingung des dritten Modes



Schwingung des zweiten Modes



Alle Schwingungen



Für die Koeffizienten A_1^m erhält man

$$A_1^m \quad = \quad \frac{2}{\ell}\int_0^\ell 0\,\sin\Big(\frac{\omega_m x}{c}\Big)\,dx = 0.$$

Die Lösung lautet damit

$$w_n(x,t) \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} A_2^n \cos(\omega_n c t)\sin\Big(\frac{\omega_n x}{c}\Big)$$

wobei $\{A_2^n : n \in \mathbb{N}\}$ durch Gleichung (6.13) und $\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ durch die Gleichung (6.11) gegeben sind.

3.3. Zusammenfassung. Folgende Punkte sind wichtig ☺

- Es gibt unendlich viele Eigenwerte oder Eigenfrequenzen. Für die Praxis sind aber i.a. die ersten **zwei bis drei Eigenfrequenzen** wichtig.
- Die Eigenfrequenzen hängen von den **Randbedingungen** ab. Das heißt, man kann die Eigenfrequenzen einer Saite verändern indem man z.B. die Aufhängung verändert.

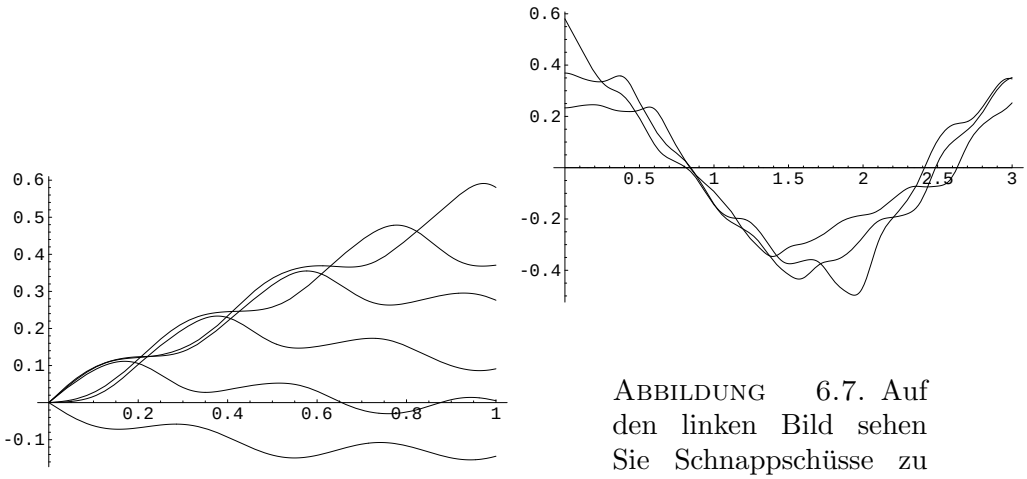


ABBILDUNG 6.7. Auf den linken Bild sehen Sie Schnappschüsse zu verschiedenen Zeiten, auf den rechten Bild den zeitlichen Verlauf der Schwingung an verschiedenen Stellen.

Zumeist braucht man die Eigenfrequenzen nicht selbst berechnen, man findet Tabellen in verschiedenen Büchern. Hier geben wir in Tabelle 1 die Eigenfrequenzen für verschiedene Randbedingungen an.

Randbedingung Links	–	Rechts	Frequenzgleichung	Zugehöriger Mode
Frei	–	Frei	$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$
Fest	–	Frei	$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2\ell}$, $n = 1, 2, \ldots$	$\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\right)$
Fest	–	Fest	$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell}$, $n = 1, 2, \ldots$	$\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$
Fest	–	Feder (K)	$\lambda_n \cot(\lambda_n) = -\left(K\ell\tau\right)$, $n = 1, 2, \ldots$	$\sin\left(\frac{\lambda_n x}{\ell}\right)$
Fest	–	Masse	$\cot\left(\lambda_n\right) = \lambda_n \left(\frac{M}{m}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ (m Saitenmasse, M Endmasse)	$\sin\left(\frac{\lambda_n x}{\ell}\right)$

TABELLE 1. Wellengleichung: Eigenfrequenzen bei verschiedener Lagerungen. Hier ist die Federsteifigkeit mit K bezeichnet, um einer Verwechslung mit der Wellenzahl k vorzubeugen. Die dimensionslose Zahl λ_n bezeichnet die n-te positive Nullstelle der angeführten Gleichungen; sie darf nicht mit der Wellenlänge λ verwechselt werden. Aus λ_n berechnet man die zugehörige n-te Eigenfrequenz als $\omega_n = \dfrac{\lambda_n c}{\ell}$

Die Gitarrensaite war ein Modell. Mit derselben Gleichung kann mann auch Torsionsschwingungen und Längsschwingungen von Schubstangen beschreiben. Der Lösungsweg ist dabei derselbe.

4. Balkenbiegeschwingungen

4.1. Schwingung eines zweiseitigen gestützten Balken. Wir werden hier nicht zu sehr auf die Ableitung der Gleichung eingehen, auch wollen wir in erster Linie die Idee vermitteln, wie man einen Balken durchrechnet, bzw. welche Mathematik dahintersteckt.

Gleichung:

$$EIw^{(IV)}(x,t) + \mu\ddot{w}(x,t) = q(x,t), \qquad (x,t) \in (0,\ell) \times [0,\infty). \tag{6.14}$$

Physikalische Größen:

- $w(x,t)$ Auslenkung des Balkens aus der Ruhelage zur Zeit $t \geq 0$ in Punkt $x \in [0,\ell]$;
- $EI(x)$: Biegesteifigkeit des Balkens im Punkt $x \in [0,\ell]$, gleich E-Modul E mal Flächenträgheitsmoment I, wird zumeist als konstant angenommen;
- $\mu(x) = \rho(x)A(x)$ Massenbelegung des Balkens in Punkt $x \in [0,\ell]$, wird zumeist als konstant angenommen;
- $\rho(x)$ Dichte des Balken in Punkt $x \in [0,\ell]$, wird zumeist als konstant angenommen;
- $A(x)$ Querschnittsfläche des Balken in Punkt $x \in [0,\ell]$, wird zumeist als konstant angenommen;
- $M(x,t) = -EI(x)w''(x,t)$ Biegemoment des Balkens zur Zeit $t \geq 0$ in Punkt $x \in [0,\ell]$;
- $q(x,t)$ die Streckenlast (orts- und zeitabhängig angreifende Querkraft pro Längeneinheit) zur Zeit $t \geq 0$ in Punkt $x \in [0,\ell]$.

Die Randbedingungen: Der Balken ist rechts und links auf zwei Halterungen gelenkig gestützt, d.h. der Ort ist festgehalten, die Auslenkung $w = 0$. Der Balken ist aber nicht fix eingespannt, d.h. er kann sich an der gelenkigen Lagerung drehen und das Biegemoment (M) ist gleich 0. Mathematisch formuliert kommt man auf folgende Gleichungen:

$$w(0,t) = 0, \quad M(0,t) = 0 \qquad w(\ell,t) = 0, \quad M(\ell,t) = 0,$$

bzw.

$$w(0,t) = 0, \quad w''(0,t) = 0 \qquad w(\ell,t) = 0, \quad w''(\ell,t) = 0,$$

Um die Lösung zu finden, nimmt man wiederum an, dass w folgendermassen darstellbar ist.

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Auch kann man wieder wie vorher eine Differenzialgleichung für X und T ableiten, indem man $X(x) \cdot T(t)$ in (6.14) einsetzt:

$$EIX^{(IV)}(x)T(t) + \mu\ddot{T}(t)X(x) = 0.$$

Bei den gleichen Argumenten wie vorher schliessen wir, dass X folgende Differentialgleichung löst:

$$EIX^{(IV)}(x) + cX(x) = 0.$$

Allgemeiner Lösungsansatz: Die Lösung wird nicht nur aus Sinus und Kosinus Termen bestehen, sondern auch aus *Sinus hyperbolicus* und *Kosinus hyperbolicus*:

$$X(x) \quad = \quad A\sin(\kappa x) + B\cos(\kappa x) + C\sinh(\kappa x) + D\cosh(\kappa x).$$

Der Sinhushyperbolikus und Cosinushyperbolikus : Die beiden Funktionen sind definiert durch:

$$\sinh(x) = \tfrac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right] \text{ und } \cosh(x) = \tfrac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right].$$

Es gilt

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \text{ und } \frac{d}{dx}\cosh(x) = sin(x).$$

Das Gleichungssystem für die Koeffizienten: Die Randbedingung $w(0,t) = 0$ ergibt

$$A\sin(\kappa 0) + B\cos(\kappa 0) + C\sinh(\kappa 0) + D\cosh(\kappa 0) \quad = \quad 0, \tag{6.15}$$

Die Randbedingung $w(\ell,t) = 0$ ergibt

$$A\sin(\kappa\ell) + B\cos(\kappa\ell) + C\sinh(\kappa\ell) + D\cosh(\kappa\ell) \quad = \quad 0,$$

Die Randbedingung $w''(0,t) = 0$ ergibt

$$-\kappa^2 A\sin(\kappa 0) - \kappa^2 B\cos(\kappa 0) + \kappa^2 C\sinh(\kappa 0) + \kappa^2 D\cosh(\kappa 0) \quad = \quad 0.$$

Die Randbedingung $w''(\ell,t) = 0$ ergibt

$$-\kappa^2 A\sin(\kappa\ell) - \kappa^2 B\cos(\kappa\ell) + \kappa^2 C\sinh(\kappa\ell) + \kappa^2 D\cosh(\kappa\ell) \quad = \quad 0.$$

Geschrieben in Matrizenform kommt man auf

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\kappa^2 & 0 & \kappa^2 \\ \sin(\kappa\ell) & \cos(\kappa\ell) & \sinh(\kappa\ell) & \cosh(\kappa\ell) \\ -\kappa^2\sin(\kappa\ell) & -\kappa^2\cos(\kappa\ell) & \kappa^2\sinh(\kappa\ell) & \kappa^2\cosh(\kappa\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Determinante: Um einen nicht triviale Lösungsvektor $(A,B,C,D)^T$ zu erhalten muss die Determinante der Matrix gleich null sein. Die Regel von Sarrus ergibt

$$\begin{aligned} \det(\kappa) = \sin(\kappa\ell) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\kappa^2 & 0 & \kappa^2 \\ -\kappa^2\cos(\kappa\ell) & \kappa^2\sinh(\kappa\ell) & \kappa^2\cosh(\kappa\ell) \end{pmatrix} \\ & + \kappa^2\sin(\kappa\ell) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\kappa^2 & 0 & \kappa^2 \\ \cos(\kappa\ell) & \sinh(\kappa\ell) & \cosh(\kappa\ell) \end{pmatrix} \\ = \quad & \sin(\kappa\ell)(-2\kappa^2\kappa^2\sinh(\kappa\ell)) + \kappa^2\sin(\kappa\ell)(-2\sinh(\kappa\ell)\kappa^2 \\ = \quad & -4\sin(\kappa\ell)\sinh(\kappa\ell)\kappa^4. \end{aligned}$$

Als Gleichung erhalten wir damit

$$\det(\kappa\ell) = -4\kappa^4\sin(\kappa\ell)\sinh(\kappa\ell) \quad = \quad 0$$

Berechnung der Nullstellen: Die Nullstellen lauten:

$$\begin{aligned} \kappa^4 = 0 &\Rightarrow \hat{\kappa}_0 = 0, \\ \sin(\kappa\ell) = 0 &\Rightarrow \kappa_n = \frac{n\pi}{\ell}, n \in \mathbb{Z}, \\ \sinh(\kappa\ell) = 0 &\Rightarrow \bar{\kappa}_n = i\frac{n\pi}{\ell}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Setzt man die reellen Eigenwerte $\kappa_n = \frac{n\pi}{l}$ ein, erhält man

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 & 0 & \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \\ 0 & (-1)^n & \sinh(n\pi) & \cosh(n\pi) \\ 0 & -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 (-1)^n & \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sinh(n\pi) & \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \cosh(n\pi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt die Eigenwerte in die Matrix einzusetzen und das Gleichungssystem nach A_n, B_n, C_n und D_n aufzulösen. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sinh(\pi n) \neq 0$, folgt aus den ersten drei Zeilen $B_n = 0$, $C_n = 0$, $D_n = 0$ und $A_n \neq 0$. Damit lautet die $n$te Eigenschwingung:

$$w_n(x,t) = (a_{cn}\cos(\omega_n t) + a_{sn}\sin(\omega_n t))\,\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right),$$

wobei gilt

$$\omega_n = \kappa^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Die Eigenschwingungsformen in Raum sind die Sinusfunktionen.
Die Koeffizienten a_{cn} und a_{sn} muss man sich anhand der Anfangsbedingungen für $w(x,0)$ und $\dot{w}(x,0)$ berechnen.

4.2. Einseitig eingespannter Balken.
Die Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0, \quad w'(0,t) = 0 \qquad\qquad w''(\ell,t) = 0, \quad w'''(\ell,t) = 0,$$

Allgemeiner Lösungsansatz:

$$X(x) \;=\; A\sin(\kappa x) + B\cos(\kappa x) + C\sinh(\kappa x) + D\cosh(\kappa x).$$

Das Gleichungssystem für die Koeffizienten: Die Randbedingung $w(0,t) = 0$ ergibt

$$A\sin(\kappa 0) + B\cos(\kappa 0) + C\sinh(\kappa 0) + D_1\cosh(\kappa 0) \;=\; 0, \tag{6.16}$$

Die Randbedingung $w'(0,t) = 0$ ergibt

$$\kappa A\cos(\kappa 0) - \kappa B\sin(\kappa 0) + \kappa C\cosh(\kappa 0) + \kappa D\sinh(\kappa 0) \;=\; 0.$$

Die Randbedingung $w''(\ell,t) = 0$ ergibt

$$-\kappa^2 A\sin(\kappa\ell) - \kappa^2 B\cos(\kappa\ell) + \kappa^2 C\sinh(\kappa\ell) + \kappa^2 D\cosh(\kappa\ell) \;=\; 0.$$

Die Randbedingung $w'''(\ell,t) = 0$ ergibt

$$-\kappa^3 A\cos(\kappa\ell) + \kappa^3 B\sin(\kappa\ell) + \kappa^3 C\cosh(\kappa\ell) + \kappa^3 D\sinh(\kappa\ell) \;=\; 0.$$

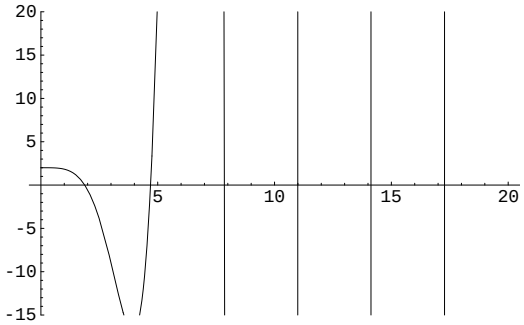


ABBILDUNG 6.8. Die Funktion $x \mapsto (1 + \cos(x)\cosh(x))$.

Das Gleichungssystem für die Koeffizienten in Matrixform: Geschrieben in Matrizenform kommt man auf

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \kappa & 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa^2\sin(\kappa\ell) & -\kappa^2\cos(\kappa\ell) & \kappa^2\sinh(\kappa\ell) & \kappa^2\cosh(\kappa\ell) \\ -\kappa^3\cos(\kappa\ell) & \kappa^3\sin(\kappa\ell) & \kappa^3\cosh(\kappa\ell) & \kappa^3\sinh(\kappa\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Determinante: Eintippen in Mathematica ergibt

$$\det(\kappa) \quad = \quad 2\kappa^6(1 + \cos(\kappa\ell)\cosh(\kappa\ell)) = 0$$

Die Nullstellen sind als $\kappa_0 = 0$ als sechsfache Nullstelle, die restlichen muss man entweder durch Matlab, Matematica berechnen lassen oder graphisch ablesen. Die Funktion $x \mapsto (1 + \cos(x)\cosh(x))$ ist in Fig. 6.8 abgebildet.
Eingesetzt ergibt das Gleichungssystem dann

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \kappa & 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa^2\sin(\kappa\ell) & -\kappa^2\cos(\kappa\ell) & \kappa^2\sinh(\kappa\ell) & \kappa^2\cosh(\kappa\ell) \\ -\kappa^3\cos(\kappa\ell) & \kappa^3\sin(\kappa\ell) & \kappa^3\cosh(\kappa\ell) & \kappa^3\sinh(\kappa\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Analyse ergibt, dass $A = -C$ und $B = -D$ gilt. Setzt man die Gleichungen in die dritte Zeile ein und kürzt durch κ^2, erhält man

$$A(\sin(\kappa\ell) - \sinh(\kappa\ell)) + B(\cos(\kappa\ell) - \cosh(\kappa\ell)) = 0.$$

Setzt man $A = (\cos(\kappa\ell) - \cosh(\kappa\ell))$ folgt, $B = -(\sin(\kappa\ell) - \sinh(\kappa\ell))$, woraus sich für die Eigenmoden ergibt:

$$\begin{aligned} w_n(x) = &(\cos(\kappa\ell) - \cosh(\kappa\ell))(\sin(\kappa x) - \sinh(\kappa x)) \\ - \quad &(\sin(\kappa\ell) - \sinh(\kappa\ell))(\cos(\kappa x) - \cosh(\kappa x)), \quad x \in [0, \ell] \end{aligned}$$

Die Eigenfrequenzen κ_n muss man anhand der graphischen Darstellung ablesen. Die ersten Werte für $l = 1$ sind $\kappa_1 = 1.87$, $\kappa_2 = 4.69$, $\kappa_3 = 7.85$ und weiters nehmen wir $\kappa_{3+n} \sim 7.85 + n\pi$ an. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \{&(\cos(\kappa_n\ell) - \cosh(\kappa_n\ell))\,(\sin(\kappa_n x) - \sinh(\kappa_n x)) \\ - \quad &(\sin(\kappa_n\ell) - \sinh(\kappa_n\ell))\,(\cos(\kappa_n x) - \cosh(\kappa_n x))\}\cos(\omega_n t), \quad x \in [0, \ell], \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

In den folgenden Graphiken 6.9 und 6.10 sind je die ersten zwei Eigenschwingungsformen dargestellt.

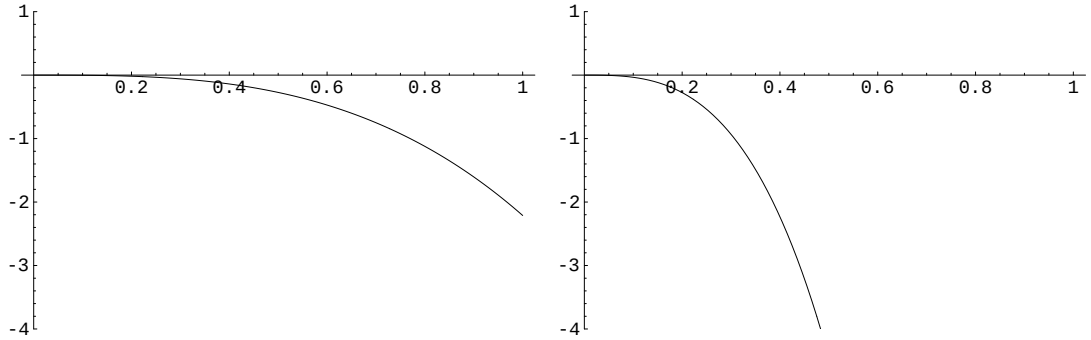


ABBILDUNG 6.9. $x \mapsto \sin(\kappa_n x) - \sinh(\kappa_n x)$, $n = 1, 2$.

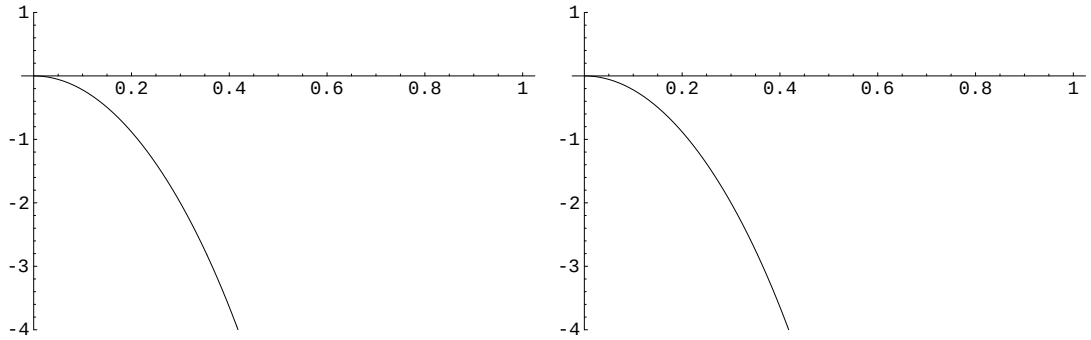


ABBILDUNG 6.10. $x \mapsto \cos(\kappa_n x) - \cosh(\kappa_n x)$, $n = 1, 2$.

Befestigung Links	–	Rechts	Frequenzgleichung $\omega_n = \lambda_n^2\sqrt{EI/(\rho AL^4)}$,	Eigenfrequenzen $n = 1, 2, \ldots$
gelenkig	–	gelenkig	$\sin(\lambda_n) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$	$\lambda_1 = 3.1416$ $\lambda_2 = 6.2832$ $\lambda_3 = 9.4248$ $\lambda_n \simeq n\pi$
fest	–	frei	$1 + \cos\lambda_n \cosh\lambda_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$	$\lambda_1 = 1.8751$ $\lambda_2 = 4.6941$ $\lambda_3 = 7.8548$ $\lambda_n \simeq (2n-1)\pi/2$
fest	–	gelenkig	$\tan\lambda_n - \tanh\lambda_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$	$\lambda_1 = 3.9266$ $\lambda_2 = 7.0686$ $\lambda_3 = 10.2102$ $\lambda_n \simeq (4n+1)\pi/4$
fest	–	fest	$1 - \cos\lambda_n \cosh\lambda_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$	$\lambda_1 = 4.7300$ $\lambda_2 = 7.8532$ $\lambda_3 = 10.9956$ $\lambda_n \simeq (2n+1)\pi/2$
frei	–	frei	$1 - \cos\lambda_n \cosh\lambda_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$	$\lambda_1 = 4.7300$ $\lambda_2 = 7.8532$ $\lambda_3 = 10.9956$ $\lambda_n \simeq (2n+1)\pi/2$

TABELLE 2. Eigenfrequenzen verschiedener Lagerungen

In der Tabelle 4.2 sind Lösungen der Frequenzgleichungen für unterschiedliche Randbedingungen zusammengefasst.

- feste Einspannung: $w(x^*, t) = 0, \quad w'(x^*, t) = 0$;
- Gelenklager: $w(x^*, t) = 0, \quad M(x^*, t) = 0$;
- freies Ende: $M(x^*, t) = 0, \quad Q(x^*, t) = 0$.

Abbildung 4.2 zeigt eine Tabelle aus Holzweißig und Dresig [**3**]. Hier sind auch die Schwingungsformen mit Knoten skizziert. Die ersten fünf Eigenfrequenzen sind mit einer zweistelligen Genauigkeit angegeben, auf der rechten Seite finden Sie eine Näherungsformel für die größeren Eigenfrequenzen.

5. Biegeschwingungen eines Balkens, Rayleigh-Quotient

Gegeben sei ein Balken der Länge L, dem Elastizitätsmodul E, dem axialen Trägheitsmoment I des Querschnitts und der Massendichte $\mu(x)$. (Die Masse des Balkens zwischen x und $x+dx$ ist also $\mu(x)\,dx$.) Wir lassen auch zu, dass E und I von x abhängen und schreiben in diesem Fall der Einfachheit halber $EI(x)$ statt $E(x) \cdot I(x)$.
Die potentielle Energie bei Balkenbiegung mit der Biegefunktion y ist dann

$$U = \frac{1}{2}\int EI(y'')^2 dx$$

Tabelle 5.7 Eigenwerte λ_i^2 und Eigenschwingformen $v_i(z)$ prismatischer Balken bei verschiedenen Randbedingungen ($\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{EI/\rho A l^4}$)

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i \geq 6$
frei – frei	$\lambda_1^2 = 0$	$\lambda_2^2 = 0$	0,224 0,776 $\lambda_3^2 = 22{,}4$	0,132 0,500 0,868 $\lambda_4^2 = 61{,}7$	0,094 0,356 0,644 0,906 $\lambda_5^2 = 121$	$\lambda_i^2 = \left(i - \frac{3}{2}\right)^2 \pi^2$
Gelenk – frei	$\lambda_1^2 = 0$	0,736 $\lambda_2^2 = 15{,}4$	0,446 0,853 $\lambda_3^2 = 50{,}0$	0,308 0,617 0,898 $\lambda_4^2 = 104$	0,235 0,471 0,707 0,922 $\lambda_5^2 = 178$	$\lambda_i^2 = \left(i - \frac{3}{4}\right)^2 \pi^2$
Einspannung – frei	$\lambda_1^2 = 3{,}52$	0,784 $\lambda_2^2 = 22{,}03$	0,504 0,868 $\lambda_3^2 = 61{,}7$	0,358 0,644 0,906 $\lambda_4^2 = 121$	0,279 0,500 0,723 0,926 $\lambda_5^2 = 200$	$\lambda_i^2 = \left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$
Gelenk – Gelenk	$\lambda_1^2 = 9{,}87$	0,500 $\lambda_2^2 = 39{,}5$	0,333 0,667 $\lambda_3^2 = 88{,}8$	0,25 0,50 0,75 $\lambda_4^2 = 158$	0,20 0,40 0,60 0,80 $\lambda_5^2 = 247$	$\lambda_i^2 = i^2 \pi^2$
Einspannung – Gelenk	$\lambda_1^2 = 15{,}4$	0,557 $\lambda_2^2 = 50$	0,386 0,692 $\lambda_3^2 = 104$	0,295 0,529 0,765 $\lambda_4^2 = 178$	0,239 0,429 0,619 0,810 $\lambda_5^2 = 272$	$\lambda_i^2 = \left(i + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2$
Einspannung – Einspannung	$\lambda_1^2 = 22{,}4$	0,500 $\lambda_2^2 = 61{,}7$	0,358 0,641 $\lambda_3^2 = 121$	0,279 0,500 0,721 $\lambda_4^2 = 200$	0,228 0,409 0,591 0,772 $\lambda_5^2 = 299$	$\lambda_i^2 = \left(i + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$

Abbildung 6.11. (Korrigierte) Tabelle aus Holzweißig, Dresig: Lehrbuch der Maschinendynamik.

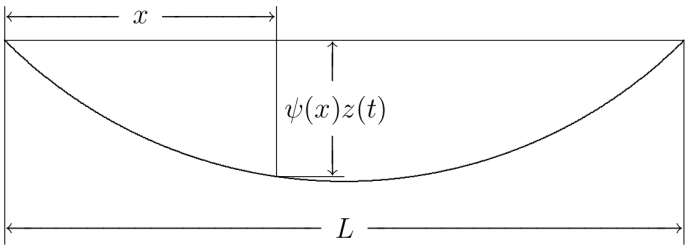


ABBILDUNG 6.12. Biegeschwingungen eines Balkens

Macht man den Ansatz $y = \psi(x)\, z(t)$ und führt die Größen verallgemeinerte Masse, Steifigkeit, geometrische Steifigkeit und effektive Last wie folgt ein:

$$m^* = \int_0^L \mu(x)\psi^2(x)dx, \qquad c^* = \int_0^L EI(x)\psi''(x)^2dx,$$
$$c^*_{\text{geom}} = N\int_0^L \psi'(x)^2dx, \qquad p^*_{\text{eff}} = -\ddot{u}_g \int_0^L \mu(x)\psi(x)dx\,.$$

Dann erhält man folgende Bewegungsgleichung

$$m^*\ddot{z} + (c^* - c^*_{\text{geom}})z = p^*_{\text{eff}}(t)\,.$$

Dabei ist $u_g(t)$ eine an einem Ende in orthogonaler Richtung zum Balken wirkende Bewegung, eine sogenannte Basiserregung. Modelliert der Balken einen Turm, so kann dies etwa die Bewegung der Basis durch ein Erdbeben sein. Diese Bewegung verursacht die effektive Last. N sei eine Belastung in Richtung der Achse des Balkens. Die kritische Belastung ist die größte, die der Balken ohne Bruch tragen kann. Sie ist

$$N_{\text{cr}} = \frac{\int_0^L EI(x)\psi''(x)^2dx}{\int_0^L \psi'(x)^2dx}\,.$$

Ohne Last N und ohne Basiserregung erhalten wir die Gleichung

$$m^*\ddot{z} + c^*z = 0\,.$$

Ihre Lösung $z(t)$ ist eine harmonische Funktion mit der Kreisfrequenz $\sqrt{\frac{c^*}{m^*}}$, die eine obere Schranke für die Grundfrequenz ω des Balkens ist. Es gilt daher

$$\omega^2 \le \frac{c^*}{m^*} = \frac{\int_0^L EI(x)\psi''(x)^2dx}{\int_0^L \mu(x)\psi^2(x)dx}$$

Wir erkennen den Rayleighquotienten wieder! Man beachte, dass Gleichheit nur dann gilt, wenn $\psi(x)$ die tatsächliche Biegefunktion ist.

BEISPIEL 6.1. Man berechne eine obere Schranke für die Grundfrequenz des in Abbildung 6.12 skizzierten Balkens unter der Annahme die Biegefunktion habe die Form

$$\psi(x) = \frac{x}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

LÖSUNG. Dazu sind die Integrale $\int_0^L \psi''^2 dx$ und $\int_0^L \psi^2 dx$ zu berechnen. Da $\psi'' = 2/L^2$ ist, ist das erste Integral gleich $4/L^4 \int_0^L dx = 4/L^3$. Das zweite Integral ist etwas mühevoller zu berechnen, aber ganz elementar. Es ergibt $L/30$, woraus wir die Abschätzung

$$\omega^2 \leq \frac{120\,EI}{\mu\,L^4}$$

erhalten. Der exakte Wert zum Vergleich:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{L^4}\frac{EI}{\mu} = \frac{97{,}4091 EI}{\mu L^4}, \qquad \text{also } \omega = \frac{9{,}8696}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

■

Sind auf dem Balken an den Stellen x_i noch n Punktmassen m_i angebracht und ψ geschätzt, so ist die letzte Formel folgendermaßen zu ergänzen:

$$\omega^2 \leq \frac{\int_0^L EI(x)\psi''(x)^2 dx}{\int_0^L \mu(x)\psi^2(x)dx + \sum_{i=1}^n m_i \psi(x_i)^2}$$

AUFGABE 6.3. *Man approximiere die Grundfrequenz eines auf beiden Seiten unterstützten Balkens in dessen Mitte eine Punktmasse m angebracht ist. Der Balken habe die Länge L. Die Größen E, I, und μ seien als konstant vorausgesetzt. Man verwende die Biegefunktion $y(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$.*

KAPITEL 7

Parametererregte Schwingungen

In der Praxis kommt es oft vor, dass die Parameter eines Systems nicht konstant sind, sondern von dem Zustand des Systems abhängen. Zum Beispiel kann man ein Pendel zum Schwingen anregen, indem man die Länge der Schnur verändert. Auch in Zahnradgetrieben ändert sich die Steifigkeit in Abhängigkeit von der Zeit, bzw. in Abhängigkeit von dem Drehwinkel. Hier wird durch die Veränderungen des Parameters dem System Energie zugeführt. Dies bewirkt, dass sich die Amplitude der Schwingung vergrößert. Diese Methode der Energiezufuhr wird parametrische Anregung genannt, die Bewegung parametererregte oder auch rheolineare Schwingung. Ein Merkmal einer rein parametrisch erzeugten Schwingung ist, dass sie, im Unterschied zu einer erzwungenen Schwingung, ohne eine anfängliche Auslenkung aus der Ruhelage nicht entstehen kann. Dabei ist zu sagen, dass in der Praxis es immer zu kleinen Störungen kommt.

Zwei verschiedene Mechanismen können Systeme zu Schwingungen anregen:

krafterregt:	$m\ddot{x} + cx = p(t)$
parametererregt:	$m\ddot{x} + c(t)x = 0.$

Das nächste Beispiel dient zur Illustration.

Beispiel 7.1. Im Antriebssystem elektrischer Lokomotiven sind Schwingungen beobachtet worden, deren Ursache in der periodischen Veränderlichkeit eines Systemparameters - hier der Federsteifigkeit - zu suchen ist. Den prinzipiellen Aufbau des Antriebs zeigt Abb. 7.1. Das mit nahezu konstanter Geschwindigkeit auf der Schiene rollende Treibrad T der Lokomotive ist im Allgemeinen über zwei Kupplungsstangen mit dem Motor M verbunden. Die mit

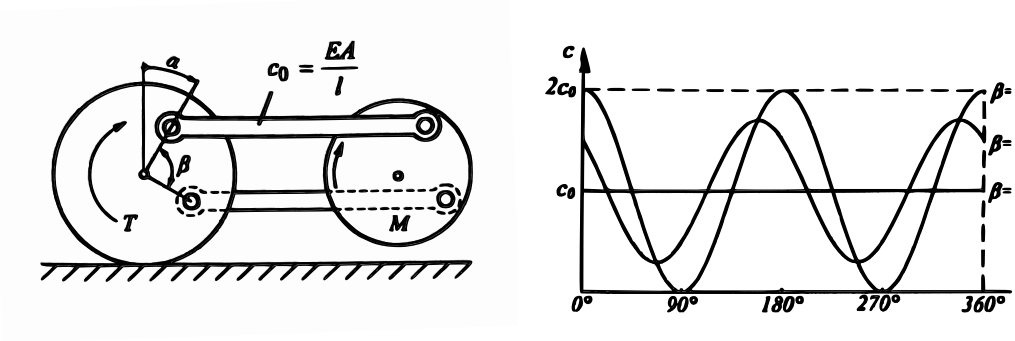


Abbildung 7.1. Links: Anordnung der Schubstangen. Rechts: Federsteifigkeit des Systems in Abhängigkeit vom Drehwinkel

dem Motor drehenden Massen können als ein elastisch an das Treibrad gekoppeltes Drehschwingungssystem aufgefasst werden. Die Federsteifigkeit dieses Schwingers hängt aber von der Stellung des Rades, also von dem Winkel α, ab. Ist $\alpha = 90°$, so befindet sich die vordere Kupplungsstange in einer Totlage und liefert keinen Beitrag zur Steifigkeit. Mit $\alpha = 90°$ ist der Steifigkeitsanteil der hinteren Stange zu diesem Zeitpunkt gerade maximal. Die Veränderung der Steifigkeit in Abhängigkeit vom Winkel α ist in Fig. 7.1 für unterschiedliche Winkel β dargestellt. Die Steifigkeit ist demnach eine periodische Funktion der Zeit, die im Verlauf einer Radumdrehung zwei Perioden durchläuft. Für $\beta = 90°$ treten jedoch keine parametererregten Schwingungen auf.
Bezeichnet man den Relativwinkel zwischen Treibrad und Motor mit ϕ, dann erhält man für den Drehschwinger unter der Voraussetzung das ϕ klein ist, die Schwingungsgleichung

$$J\ddot{\phi}(t) + c(t)\phi(t) = 0.$$

Das ist eine Schwingungsgleichung mit periodisch veränderlichem Koeffizienten.

1. Berechnung eines Schaukelsschwinger

Die Schaukel kann als Musterbeispiel eines parameter-selbsterregten Systems angesehen werden. Das In-Gang-Bringen einer Schaukel geschieht normaler Weise durch eine Kombination von Wippbewegungen und Schwerpunkstsverlagerung. Im Prinzip ist es auch möglich, sich nur durch Heben und Senken des Schwerpunktes hochzuschaukeln.
Als Modell nehmen wir ein Pendel an, bei dem sich die Länge des Fadens in Abhängigkeit des Winkels verändert. Ein spektakuläres Beispiel ist das Weihrauchfass in der Kathedrale von Santiago de Compostela (das *Botafumeiro*). Es hängt an einem Seil von der Decke. über eine Umlenkrolle ziehen Mönche in passenden Rhythmus am Seil. Schon nach wenigen Schwingungen pendelt das *Botafumeiro* nahezu waagrecht aus[1].
In unserem Modell kann das Pendel die Fadenlängen L_1 und L_2 annehmen ($L_1 > L_2$). Den größeren Wert L_1 nimmt die Fadenlänge für die Bewegung zwischen den Maximalausschlägen und der Nulllage an (also für die Abstiegsphase); für Bewegung zwischen Nulllage und den Maximalausschlägen (also für die Anstiegsphase) nimmt die Fadenlänge den Wert L_2 an. Man kann somit die Fadenlänge als Funktion des Ausschlagswinkels ϕ und seiner Ableitung $\dot{\phi}$ ausdrücken:

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \begin{cases} L_1 & \text{für } \phi > 0 \text{ und } \dot{\phi} < 0, \\ L_2 & \text{für } \phi \leq 0 \text{ und } \dot{\phi} < 0, \\ L_1 & \text{für } \phi \leq 0 \text{ und } \dot{\phi} \geq 0, \\ L_2 & \text{für } \phi > 0 \text{ und } \dot{\phi} \geq 0. \end{cases}$$

Die Gleichung eines Pendels mit konstanter Fadenlänge L lautet

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{g}{L}\sin(\phi(t)) = 0. \tag{7.1}$$

Multiplizieren wir (7.1) mit $\dot{\phi}(t)$, so erhalten wir

$$\ddot{\phi}(t)\dot{\phi}(t) + \frac{g}{L}\sin(\phi(t))\dot{\phi}(t) = 0. \tag{7.2}$$

[1]Sie finden dazu leicht Videos im Netz, zum Beispiel: `https://www.youtube.com/watch?v=Kl3IJWR4iX4`

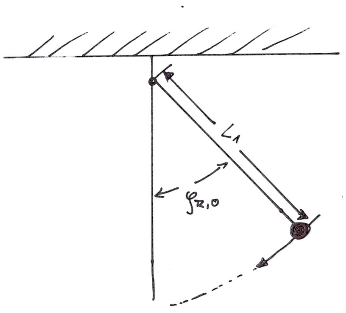
Wie wir es schon bei nichtlinearen Differentialgleichungen gemacht haben, leiten wir das Vorintegral ab. Aufgrund der Kettenregel gilt ja

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}(t)\right)^2 = \ddot{\phi}(t)\dot{\phi}(t)$$

und
Die beiden Beziehungen in (7.2) eingesetzt ergibt Nach der Zeit integrieren ergibt für $t > 0$ Da die kinetische Energie Masse $\times$ Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit $\dot{\phi}L$ ist, schreiben wir

$$\underbrace{\frac{m}{2}L^2\left(\dot{\phi}(t)^2\right)}_{=\text{kinetische Energie}} + \underbrace{mgL\Big(1-\cos(\phi(t))\Big)}_{=\text{potentielle Energie}} = mgL(1-\cos(\phi_0)) \tag{7.3}$$

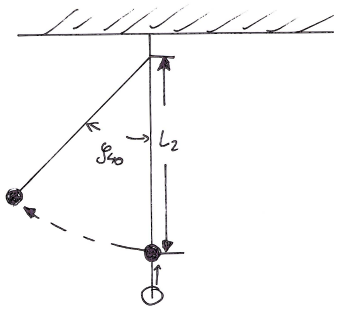
schreiben. Hier bezeichnet ϕ_0 den Ausgangswinkel. Sie beschreibt die Energieerhaltung, gilt aber nicht, wenn sich die Fadenlänge ändert. Die notwendige Zugkraft, um L zu verkürzen, leistet nämlich Arbeit am System und führt somit Energie zu. Die Zugkraft übt aber kein Drehmoment aus, ändert also den Drehimpuls nicht.
Um das Anwachsen der Amplitude zu berechnen, teilen wir eine Schwingung in vier Viertelschwingungen auf. Wir verwenden während der Viertelschwingungen jeweils Gleichung (7.3), und für den übergang dazwischen den Drehimpulssatz.



Erste Viertelschwingung. Wir gehen davon aus, dass das Pendel nach rechts mit einem Winkel $\phi(0) = \phi_{R,0}$ angehoben und losgelassen wird. Beachte, da zum Zeitpunkt $t = 0$ das Pendel still steht, gilt $\dot{\phi}(0) = 0$. Das heisst, die kinetische Energie ist null. Beachte, dass der Wert von E_{pot} von der Wahl des Bezugsniveaus (der Integrationskonstanten) abhängt. Lässt man die Kugel los, so wird potentielle in kinetische Energie umgewandelt. Durchläuft das Pendel die Nulllage zum Zeitpunkt τ_0 (d.h. $\phi(\tau_0) = 0$), so ist die gesamte potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt worden und Gleichung (7.3) gilt in der Form

$$E_{pot}(0) = mgL_1\left(1-\cos(\phi(0))\right) = E_{kin}(\tau_0) = \frac{m}{2}L_1^2\left(\dot{\phi}(\tau_0)\right)^2. \tag{7.4}$$

Zweite Viertelschwingung. Beim Durchgang durch die Ruhelage wird der Schwerpunkt auf die Länge L_2 transferiert. Die Winkelgeschindigkeit ändert sich von $\dot{\phi}(\tau_0)_v$ auf $\dot{\phi}(\tau_0)_n$ (Indizes v für vorher, n für nachher). Der Drehimpuls ändert sich dabei nicht, es gilt



$$mL_1^2\dot{\phi}(\tau_0)_v = mL_2^2\dot{\phi}(\tau_0)_n \tag{7.5}$$

Danach schwingt das Pendel aus. Zum Zeitpunkt τ_L befindet sich das Pendel am linken äußersten Punkt und steht einen Augenblick lang still. Die maximale Auslenkung nach Links (d.h. in diesem Punkt) beträgt $\phi(\tau_L) = \phi_{L,0}$.
Da sich die gesamte kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt hat, gilt Gleichung (7.3) in der Form

$$E_{pot}(\tau_L) = mgL_2\left(1-\cos(\phi(\tau_L))\right) = \frac{m}{2}L_2^2\left(\dot{\phi}(\tau_0)_n\right)^2 \tag{7.6}$$

$$= \frac{m}{2}L_2^2\frac{L_1^4}{L_2^4}\left(\dot{\phi}(\tau_0)_v\right)^2 \tag{7.7}$$

$$= \frac{L_1^2}{L_2^2}\frac{m}{2}L_1^2\left(\dot{\phi}(\tau_0)_v\right)^2 = \frac{L_1^2}{L_2^2}L_1 mg(1-\cos(\phi(0))). \tag{7.8}$$

Aus den Gleichungen (7.4), (7.5) und (7.6) lässt sich die Beziehung zwischen $\phi_{R,0}$ und $\phi_{L,0}$ herleiten:

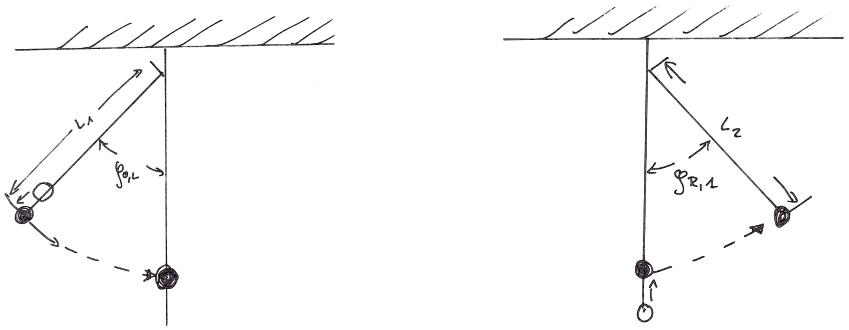
$$1-\cos(\phi_{R,0}) = \frac{L_2^3}{L_1^3}\big(1-\cos(\phi_{L,0})\big)$$

und damit

$$\cos(\phi_{R,0}) = 1-\frac{L_1^3}{L_2^3}\big(1-\cos(\phi_{L,0})\big)$$

Die Pendellänge verlängert sich nun (in Zeitpunkt τ_L) wieder von L_2 auf L_1. (Für unser Modell nehmen wir an, dass sich der Pendelkörper entlang der Pendelstange nach unten schieben lässt; für ein Fadenpendel ist diese momentane Verlängerung so nicht möglich, der Faden bliebe dabei nicht gespannt.) Das ändert weder den Ausschlagwinkel $\phi(\tau_L)$, noch Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(\tau_L)$ (weil die ist und bleibt Null). Nur die potentielle Energie des Systems ändert sich, weil der Pendelkörper absinkt.

Dritte und vierte Viertelschwingung. Das Pendel schwingt wieder zur die Nulllage zurück. Dort verkürzt sich L_1 auf L_2. Das Pendel schwingt weiter und erreicht zum Zeitpunkt τ_R den Maximalausschlag $\phi_{R,1}$ am rechten Umkehrpunkt, wo sich L_2 wieder auf L_1 verlängert.



Die Situation gleicht spiegelbildlich der zweiten und der ersten Viertelschwingung. Wieder lässt sich eine Beziehung zwischen Anfangs- und Endausschlag herstellen:

$$1 - \cos(\phi_{L,0}) = \frac{L_2^3}{L_1^3}\big(1 - \cos(\phi_{R,1})\big).$$

Insgesamt vergrößert sich der Maximalausschlag pro Schwingungsperiode also gemäß

$$\cos(\phi_{R,1}) = 1 - \left(\frac{L_1^3}{L_2^3}\right)^2 \big(1 - \cos(\phi_{R,0})\big) \tag{7.9}$$

Da $L_1 > L_2$ ist, wird der Ausschlagswinkel immer größer, solange in Gleichung (7.9) die rechte Seite ≥ -1 bleibt. Ist erstmals ϕ_R so groß, dass die rechte Seite < -1 wird, wird Gleichung (7.9) unlösbar. Das Pendel überschlägt sich und kommt nicht mehr zum Stillstand.

2. Ein parametrischer Oszillator

Ein parametrischer Oszillator ist ein harmonischer Oszillator mit zeitabhängigen Parametern. Dem Oszillator wird auf diese Weise Energie zugeführt, dadurch vergrößert sich die Amplitude der Schwingung. Ein Oszillator mit rein parametrischer Anregung lässt sich durch folgende (ganz allgemeine) homogene Differentialgleichung beschreiben:

$$m(t)\ddot{x}(t) + b(t)\dot{x}(t) + k(t)x(t) = 0, \quad t > 0. \tag{7.10}$$

Dabei sind die zeitabhängigen Funktionen $m(t)$, $b(t)$ und $k(t)$ die Parameter des Systems.

2.1. Variation der Steifigkeit. Nehmen wir zunächst an, dass die Masse und die Dämpfung konstant sind und dass die Steifigkeit periodisch variiert:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k(t)x(t) = 0, \quad k(t) = k_0\left(1 + h\cos\left(\Omega t\right)\right),$$

wobei k_0 die mittlere Steifigkeit, h die Amplitude und Ω die Frequenz der Anpassung der Steifigkeit ist. Wir erhalten als "kritische Kreisfrequenz" und als "Dämpfungsgrad"

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \quad \text{und} \quad D = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

Mit diesen beiden Größen erhält die Differentialgleichung die Form:

$$\ddot{x}(t) + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2\left(1 + h\cos\left(\Omega t\right)\right)x(t) = 0. \tag{7.11}$$

Wie üblich interessieren wir uns, wie stabil das System ist. Hier zeigt sich, dass keine externe Kraft von Nöten ist, um Instabilität zu erzeugen. Wie wir sehen werden tritt diese auf, wenn $\Omega = 2\omega_0$ ist. Andere Instabilitäten liegen in der Nähe von $\Omega = 2\omega_0/n$ für $n \geq 2$.

Bevor wir weitermachen, wollen wir uns noch kurz überlegen, warum das so ist. Bei einem ganzzahligen Verhältnis $\Omega\colon \omega_0$ liegen die "Zungen" der Funktion $\cos(\Omega t)$ exakt über denen der Lösungsfunktion der Differentialgleichung und es kommt zu Resonanz. Diese beiden Funktionen schaukeln sich also gegenseitig auf und das System wird instabil – sofern die Dämpfung nicht zu groß ist. Mit analytischen Methoden kann man zeigen, dass ein Kriterium für Instabilität, wenn das System in der Hauptfrequenz $\Omega = 2\omega_0$ betrieben wird, die Bedingung

$$h > 2D$$

ist. Abseits der Hauptfrequenz erhalten wir für Instabilität die Bedingung

$$h > 2\sqrt{D^2 + \delta^2} \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{\Omega - 2\omega_0}{2\omega_0},$$

wobei δ die "Verstimmtheit" beschreibt.
Betrachten wir noch die Wachstumsrate. Für kleines h mit $h > 2D$ und $\Omega = 2\omega_0$ wächst die einhüllende Kurve exponential mit Koeffizient

$$\sigma \approx \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{h}{2} - D\right).$$

Wenn $h \leq 2D$ dann erhalten wir immer Stabilität und die Bewegen ähnelt einer modulierten Vibration rund um die natürliche Frequenz.

Beispiel 7.2. Seien $m = 1\,\mathrm{kg}$ und $k_0 = 1600\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Dann ist die natürliche Frequenz $\omega_0 = 40\,\mathrm{rad/s}$. Weiters sei der Dämpfungsgrad $D = 0{,}02$ und somit ist die Dämpfung $b = 1{,}6\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$. Schließlich sei $h = 0{,}08 = 8\,\%$. Wir betrachten zwei Fälle:

(1) Für $\Omega = 2\omega_0 = 80\,\mathrm{rad/s}$ erhalten wir, dass $h = 0{,}08 > 0{,}04 = 2D$ und somit ist das System instabil. Als Wachstumsrate erhalten wir

$$\sigma \approx \frac{40}{2}\left(\frac{0{,}08}{2} - 0{,}02\right) = 0{,}4\,\mathrm{s^{-1}}.$$

Daraus gibt sich eine Zeit bis zur doppelten Amplitude von

$$T_2 \approx (\ln 2)/\sigma \approx 0{,}693/0{,}4 \approx 1{,}73\,\mathrm{s}.$$

Selbst bei einer "kleinen" Amplitude der Anpassung von nur 0,08 verdoppelt sich die Amplitude des Systems alle zwei Sekunden wegen der Resonanz.

(2) Nun wählen wir eine Frequenz 5 % über der Hauptresonanz: $\Omega = 84\,\mathrm{rad/s}$. Wir erhalten also

$$\delta = \frac{84 - 80}{2 \cdot 40} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Um die Stabilität zu überprüfen, berechnen wir

$$h_{\mathrm{thr}} \approx 2\sqrt{0{,}02^2 + 0{,}05^2} \approx 2\,(0{,}054) \approx 0{,}108.$$

Nachdem $h = 0{,}08 < 0{,}108 = h_{\mathrm{thr}}$ ist, ist unser System stabil.

Wir wollen die Gleichung (7.11) noch "dimensionslos" machen. Dazu führen wir die Variablentransformation $\tau = (\Omega/2)\,t$ durch und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}(\tau) + \frac{4D}{\Omega}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(\tau) + \left[\left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2 \frac{h}{2}\cos(2\tau)\right] x(\tau) = 0.$$

Dabei handelt es sich um eine gedämpfte Mathieusche[2] Differentialgleichung, welche wir unten noch genauer behandeln.
Wenn wir den Dämpfungsgrad gegen 0 gehen lassen, erhalten wir im Grenzfall eine Differentialgleichung von der Form

$$\ddot{x} + (a - 2q\cos(2\tau))\, x = 0,$$

mit Parameter $a = (2\omega_0/\Omega)^2$ und $q = (h/2)a$.

2.2. Die Hillsche Differentialgleichung. Kehren wir nun zur allgemeinen Differentialgleichung (7.10) eines parametrischen Oszillator zurück. Mittels der Variablentransformation

$$y = x \exp\left(\frac{1}{2}\int \frac{d}{m}\,\mathrm{d}t\right)$$

können wir diese Gleichung auf die Form

$$\ddot{y}(t) + \left[\frac{c}{m} - \frac{1}{4}\left(\frac{d}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{d}{m}\right)\right] y(t) =: \ddot{y}(t) + P(t)y(t) = 0 \tag{7.12}$$

bringen.
Wenn die Parameter m, b und k periodisch mit Periode T_p sind, dann gilt dasselbe auch für P. Allgemein bezeichnet man die Gleichung (7.12) als Hillsche[3] Differentialgleichung. Die in der Praxis interessanten Fälle besitzen zumeist Lösungen von der Form

$$y(t) = C_1 e^{\mu_1 t} y_1(t) + C_2 e^{\mu_2 t} y_2(t),$$

wobei C_1 und C_2 Konstanten, y_1 und y_2 periodische Funktionen und μ_1 und μ_2 die sogenannten *charakteristischen Exponenten* sind. Diese Exponenten hängen von den Parametern m, b und k und nicht von den Anfangsbedingungen ab. Wenn einer dieser Exponenten einen positiven Realteil besitzt, dann wächst $|y(t)|$ für $t \to \infty$ gegen unendlich und wir haben ein instabiles System. Wenn auf der anderen Seite alle Exponenten einen negativen Realteilbesitzen, dann erhalten wir $y \to 0$ für $t \to \infty$ und y ist (asymptotisch) stabil. Im Grenzfall kann aber auch ein (oder beide) Realteil verschwinden. Dann bleibt y beschränkt ohne nach 0 zu konvergieren.
In der Schwingungslehre interessieren wir uns für reelle Exponenten μ. Da haben wir dann eine klaren Grenzfall in welchem nur periodische Lösungen existieren. Daher interessieren wir uns, wenn wir von Stabilität sprechen, für diese Grenzfälle.
Die oben erwähnte Mathieusche Differentialgleichung ist der Spezialfall mit

$$P(t) = P_0 + \Delta P \cos(\Omega t)\,.$$

Analog zu oben führen wir die dimensionslose Zeit $\tau = \Omega t$ ein. Dann erhalten wir die Normalform der Mathieuschen Differentialgleichung

$$y'' + (\lambda + \gamma\cos\tau)y = 0,$$

wobei

$$\lambda = \frac{P_0}{\Omega^2} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\Delta P}{\Omega^2}$$

sind.

[2]nach Émile Léonard Mathieu (1835 – 1890)
[3]nach George William Hill (1838 – 1914)

3. Ein Schubkurbelgetriebe

In vielen Textilmaschinen, Verarbeitungsmaschinen und Umformungsmaschinen werden ungleichmäßig übersetzende Getriebe eingesetzt, um bestimmte Bewegungen zu erzielen.

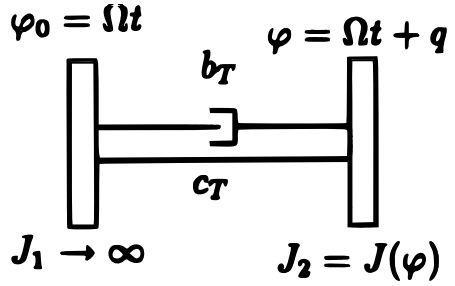


ABBILDUNG 7.2. Modell des Torsionsschwingers mit ungleichmäßig übersetzendem Mechanismus am Abtrieb (nach Holzweißig-Dresig)

Das Berechnungssystem ist in Bild 7.2 dargestellt. Es besteht aus einen Antriebsglied, dass sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω dreht, einer Antriebswelle mit Torsionsfederkonstanten c und von der Stellung des Antriebsgliedes abhängigen Massenträgheitsmoment $J(\phi)$. Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht zwischen Moment aus den Massenkräften und dem Rückstellmoment der elastischen und viskos gedämpften Torisonsfeder der Antriebswelle.
Wir kommen somit zur folgender nichtlinearer Bewegungsgleichung

$$J(\phi(t))\ddot{\phi}(t) + \frac{1}{2}\cdot J'(\phi(t))\dot{\phi}^2(t) + c(\phi(t) - \phi_0(t)) + b(\dot{\phi}(t) - \dot{\phi}_0(t)) = 0. \tag{7.13}$$

Die Drehbewegung ϕ setzt sich aus einem Anteil mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und einem relativen Verdrehwinkel q zusammen:

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= \Omega\, t, & \phi(t) &= \phi_0(t) + q(t) = \Omega\, t + q(t), \\ \dot{\phi}(t) &= \Omega + \dot{q}(t), & \ddot{\phi}(t) &= \ddot{q}(t). \end{aligned}$$

Nimmt man an, dass der Winkel q klein ist (und bleibt), kann man das System linearisieren. Das heisst wir entwickeln $J(\phi)$ in eine Taylor–Reihe und brechen nach dem linearen Glied ab. Damit gilt:

$$J(\phi(t)) \sim J(\Omega t) + J'(\Omega t)q, \quad J'(\phi(t)) \sim J'(\Omega t) + J''(\Omega t)q.$$

Setzten wir obige Approximationen in (7.13) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\big(J(\Omega t) + J'(\Omega t)q\big)\,\ddot{q}(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\cdot\big(J'(\Omega t) + J''(\Omega t)q(t)\big)\Big(\underbrace{\dot{\phi}_0(t)}_{=\Omega} + \dot{q}(t)\Big)^2 + cq(t) + b\dot{q}(t). \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt multiplizieren wir alles aus und vernachlässigen alle Terme, die ein Quadrat bzgl. q erhalten. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \ldots \;&=\; J(\Omega t)\ddot{q}(t) + \frac{1}{2}J'(\Omega t)\Omega^2 + J'(\Omega t)\Omega\dot{q}(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}J''(\Omega t)\Omega^2 q(t) + cq(t) + b\dot{q}(t) = 0. \end{aligned}$$

Umordnen ergibt

(7.14)

$$J(\Omega t)\ddot{q}(t) + (b + J'(\Omega t)\Omega)\dot{q}(t) + (c + \frac{1}{2}J''(\Omega t)\Omega^2)q(t) = -\frac{1}{2}J'(\Omega t)\Omega^2.$$

In (7.14) geht das reduzierte Trägheitsmoment $J(\Omega t)$ als zeitabhängige Größe ein. Damit ist aus der ursprünglichen autonomen Differenzialgleichung eine sogenannte *rheolineare* Differenzialgleichung geworden. Das reduzierte Trägheitsmoment des Schubkurbekgetriebes lautet

$$J(\phi) \sim J_2 + m_4 L_2^2 \sin^2(\phi(t)) \sim J_2 + m_4 L_2^2 \sin^2(\Omega t).$$

Die Ableitung nach den Winkel ergibt

$$J'(\phi) = 2m_4 l_2^2 \sin(\Omega t)\ \cos(\Omega t).$$

Ob und wann es zum Aufschaukeln kommt, hängt von den genauen Werten der Parameter ab. Hier in der Bildfolge 7.3 haben wir Ω verändert, die anderen Werte lagen bei $J_2 = 1$, $m_4 L_2^2 = 0.75$, $c = 0.6$, $b = 0.01$:

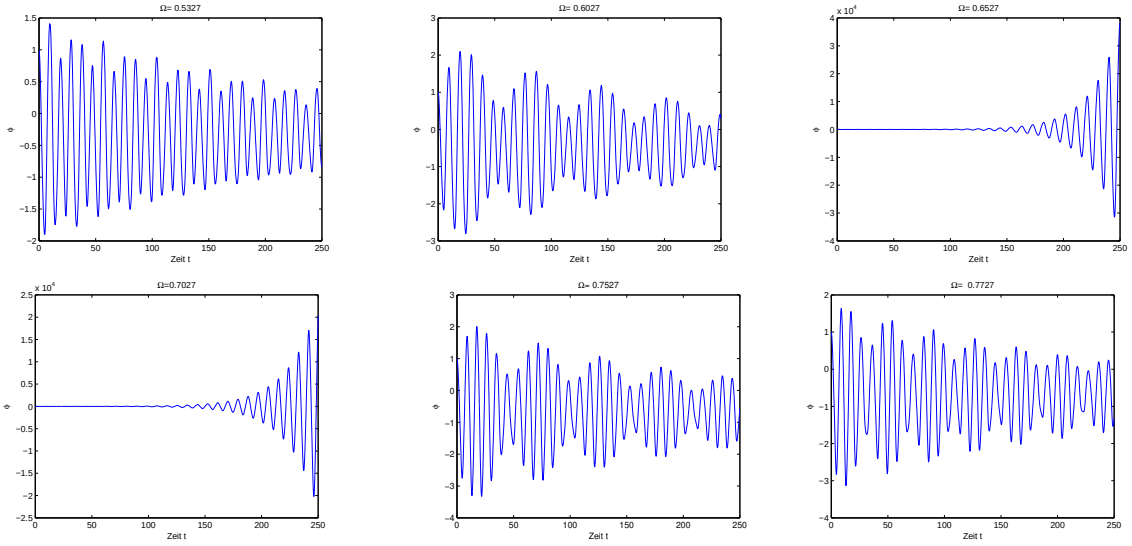


Abbildung 7.3. Aufschaukeln des Schubkurbelgetriebes

In der nächsten Bildfolge 7.4 wurde wieder nur Ω verändert, die anderen Werte lagen bei $J_2 = 1$, $m_4 L_2^2 = 0.75$, $c = 0.6$, $b = 0.05$:

Je nach Drehgeschwindigkeit (Ω) kann es zum Aufschaukeln der Schwingung kommen.

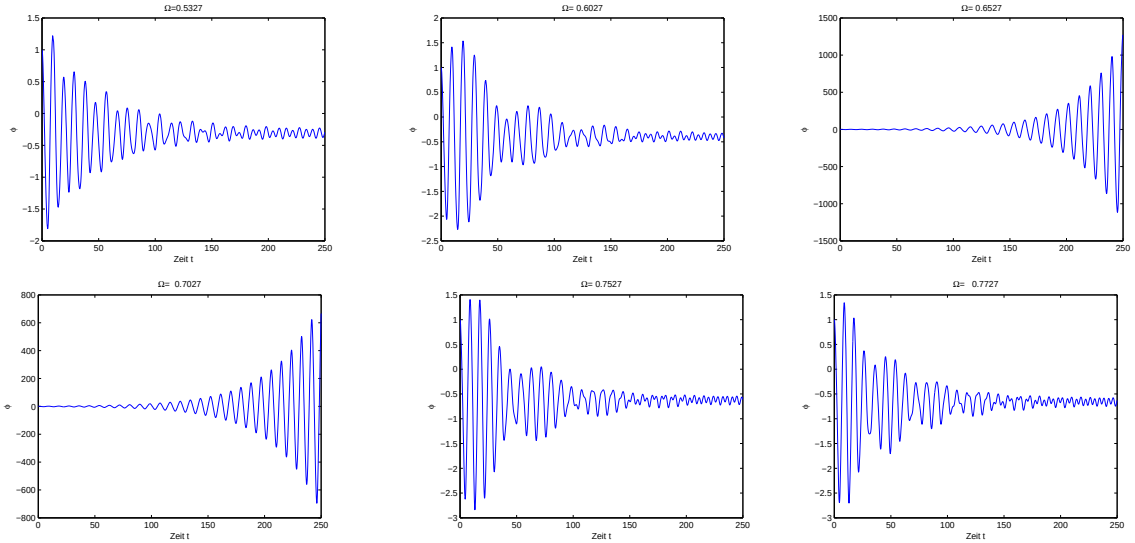


ABBILDUNG 7.4. Aufschaukeln des Schubkurbelgetriebes

ANHANG A

Distributionen

1. Die Menge der Testfunktionen

Distributionen sind Verallgemeinerungen von Funktionen. Für diese gibt es mehrere Herleitungen und wir wollen hier eine physikalische wählen. Nehmen wir an, $f(x, y, z)$ beschreibt die Temperatur in einem Punkt (x, y, z) im Raum. Wir wollen die Temperatur mit einem Thermometer messen. Nachdem dieses aber nicht die Ausdehnung 0 hat, messen wir immer auch die Temperatur in einer Umgebung mit. Was wir eigentlich messen, entspricht daher eher dem folgenden (gewichteten) Integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\varphi(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

wobei φ unser Thermometer beschreibt.
Überlegen wir uns kurz, welchen Bedingungen die Funktion φ genügen muss. Zunächst nehmen wir an, wenn die Temperatur im ganzen Raum konstant ist ($f(x, y, z) = c$), dann soll auch unser Thermometer diese Temperatur anzeigen. Mathematisch entspricht dem, dass die Funktion φ normiert ist, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1.$$

Diese Bedingung ist nicht unbedingt notwendig, weil wir jede gegebene Funktion normieren können.
Die erste richtige Bedingung ist, dass die Temperatur im Nebenraum keinen Einfluss auf das Thermometer hat. Mathematisch bedeutet das, dass φ auf einer kompakten Menge ungleich 0 ist – kompakten Träger hat.
Weiters nehmen wir an, dass der Einfluss der Temperatur sich nicht sprunghaft verhält. Mathematisch bedeutet das, dass φ glatt ist, spricht unendlich oft differenziert werden kann. Schließlich war der $\mathbb{R}^3$ nur eine Annahme und wir können (wie in der Analysis oft) annehmen, dass alle Funktion auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind.

Definition A.1

Eine Funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, die glatt ist und einen kompakten Träger besitzt, nennen wir eine Testfunktion. Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}(\Omega)$ die Menge aller Testfunktionen auf Ω.

In der Literatur wird die Menge der Testfunktionen oft mit $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ bezeichnet. Dabei steht das „∞“ für die Glattheit und das „c“ im Index für den kompakten Träger.
Die Menge der Testfunktionen ist nicht leer und wir wollen eine Familie von Vertretern konstruieren. Dazu definieren wir die Funktion $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$E(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{wenn } x < 0; \\ 0 & \text{wenn } x \geq 0. \end{cases}$$

Für $x < 0$ und $k \geq 1$ zeigen wir mittels vollständiger Induktion, dass

$$E^{(k)}(x) = P_k(1/x)E(x),$$

wobei $P_k(x)$ eine rekursiv definierte Folge von Polynomen ist, mit

$$P_0(x) = 1 \quad \text{und} \quad P_n(x) = -x^2 \left(P_{k-1}(x) + P'_{k-1}(x)\right).$$

Der Träger von E ist $\mathbb{R}_-$. Außerdem ist E glatt auf ganz $\mathbb{R}$, denn $E^{(k)}(x)$ ist stetig auf beiden Teilen ($x > 0$ und $x < 0$) und für $x = 0$ haben wir

$$\lim_{x \to 0^-} E^{(k)}(x) = 0, \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Ausgehend von der Funktion E können wir die Funktion $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren als

$$\psi(x) = E\left(\|x\|^2 - 1\right). \tag{A.1}$$

Diese ist wiederum glatt (nach der Kettenregel) und hat als Träger den abgeschlossenen Kreis $\overline{B(0,1)}$. Manchmal brauchen wir auch eine normierte Variante von ψ und definieren dazu

$$\phi(x) := \frac{\psi(x)}{\int_\Omega \psi(y)\,\mathrm{d}y}.$$

Schließlich definieren wir für $\varepsilon > 0$ eine Funktion ϕ_ε als

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{A.2}$$

Definition A.2

Eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Testfunktionen konvergiert gegen eine Testfunktion φ, wenn

(1) es eine kompakte Menge K in $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass für alle k, $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K$;
(2) für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$, die Folge $(\partial^\alpha \varphi_k)$ gleichmäßig auf K gegen $\partial^\alpha \varphi$ konvergiert.

2. Die Menge der Distributionen

Definition A.3

Eine lineare stetige Form T auf $\mathcal{D}(\Omega)$ wird ***Distribution auf*** Ω (oder einfach nur ***Distribution***) genannt. Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ oder $\mathcal{D}'$ die Menge aller Distributionen auf Ω.

Der Apostroph beim $\mathcal{D}$ bedeutet, dass es sich hier um die duale Menge handelt.

Bemerkung. Wir schreiben traditionellerweise

$$\langle T, \varphi\rangle := T(\varphi)$$

für das Bild einer Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ unter der Distribution T.

Eine Distribution auf Ω ist eine Abbildung von $\mathcal{D}(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} T\colon \mathcal{D} &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle \end{aligned}$$

und sodass

(1) *Linearität*, das heißt

$$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}\colon\ \langle T, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\rangle = a_1 \langle T, \varphi_1\rangle + a_2 \langle T, \varphi_2\rangle ,$$

(2) und *Kontinuität*, das heißt, wenn

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \varphi,$$

dann ist

$$\langle T, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{R}} \langle T, \varphi\rangle ,$$

gelten.
An dieser Stelle wollen wir anmerken, wenn T linear ist, dann genügt es zu zeigen, dass

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{R}} 0.$$

Dabei ist die Distribution 0 jene, die jeder Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}$ den Wert 0 zuordnet. Wir definieren die Summe zweier Distributionen T_1 und T_2 als

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}) \quad \langle T_1 + T_2, \varphi\rangle = \langle T_1, \varphi\rangle + \langle T_2, \varphi\rangle$$

und das Produkt eines Skalars $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einer Distribution T als

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}) \quad \langle \lambda T, \varphi\rangle = \lambda \langle T, \varphi\rangle .$$

3. Beispiele für Distributionen

Bei den Distributionen unterscheidet man zwei Typen.

3.1. Reguläre Distribution.

Beispiel A.1. Sei f lokal integrierbar auf Ω. Wir definieren die assoziierte Distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ als

$$T_f\colon \varphi \mapsto T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Die Linearität folgt auf Grund der Integraldarstellung. Für die Stetigkeit bemerken wir, dass für jede Testfunktion φ gilt

$$|T_f(\varphi)| = \left|\int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \le C\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Testfunktionen in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, die gegen φ konvergiert. Dann existiert ein Kompaktum K in $\mathbb{R}^n$, welches den Träger von φ und den jeder Testfunktion φ_k enthält. Auf Grund der Linearität folgt, dass

$$|T_f(\varphi - \varphi_k)| = \left|\int_K f(x)\,(\varphi(x) - \varphi_k(x))\,\mathrm{d}x\right| \le C\|\varphi - \varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Also ist T_f stetig auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und somit eine Distribution.

Definition A.4

Eine Distribution T ist ***regulär***, wenn sie einer lokal integrierbaren Funktion f assoziiert ist.

Beispiel A.2 (Konstante Distribution). Für jedes $C \in \mathbb{R}$ können wir die folgende Distribution

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle C, \varphi \rangle = \int_\Omega C\varphi(x)\mathrm{d}x = C \int_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}x$$

definieren. Im speziellen, erhalten wir bei $C = 0$ die (reguläre) Distribution Null.

Beispiel A.3 (Heaviside). Die Heaviside Funktion $\Theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

In gleicher Weise definieren wir auch die Heaviside Distribution mittels:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \Theta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Wegen der Linearität ist die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sign}(x) = 2\Theta(x) - 1$ auch eine Distribution.

Satz A.5

Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf Ω. Dann gilt:

$$T_f = 0 \iff f = 0 \quad \text{fast überall auf } \Omega.$$

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ und $r > 0$, sodass die Kreisscheibe $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Wir setzen $\widetilde{f} = f|_{B(x_0,r)}$ – die Restriktion von f auf die Kreisscheibe $B(x_0, r)$. Diese ist auch lokal integrierbar.
Wir nutzen nun die Approximationen der Identität ϕ_ε wie sie in Gleichung A.2 definiert sind für $\varepsilon < r$. Darüber hinaus setzen wir $\varphi_{\varepsilon,x}(y) = \phi_\varepsilon(x - y)$. Damit erhalten wir für die Faltung

$$\widetilde{f} * \phi_\varepsilon = \int_{B(x_0,r)} f(y)\phi_\varepsilon(x - y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega f(y)\phi_\varepsilon(x - y)\,\mathrm{d}y = \langle T_f, \varphi_{\varepsilon,x} \rangle = 0,$$

weil $T_f = 0$. Auf der anderen Seite ist

$$\widetilde{f} * \phi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^1} \widetilde{f}$$

und daher $f = 0$ fast überall auf $B(x_0, r)$. Nachdem wir $x_0 \in \Omega$ beliebig gewählt haben, impliziert $T_f = 0$, dass auch $f = 0$ fast überall auf Ω. □

3.2. Nicht reguläre Distributionen.

Definition A.6

Jede Distribution, die nicht regulär ist, heißt ***nicht regulär*** oder ***singulär***.

Das wohl bekannteste Beispiel einer nicht reguläre Distribution ist jenes der

Beispiel A.4 (Dirac-Funktion). Für jedes $a \in \Omega$ ist die Abbildung

$$\delta_a\colon \varphi \mapsto \delta_a(\varphi) = \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

eine Distribution. Die Linearität ist klar und für die Kontinuität bemerken wir, dass $|\delta_a(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Satz A.7

Die lineare Abbildung $f \mapsto T_f$ von $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

BEWEIS. Die Injektivität folgt nach Satz 3.1.
Es bleibt zu zeigen, dass zum Beispiel die Dirac-Funktion keine regulär Distribution ist. Anders gesagt, es gibt keine lokal integrierbare Funktion f, zu der δ_a assoziiert ist. Fixieren wir ein $a \in \mathbb{R}$ und die zugehörige Distribution δ_a. Nehmen wir an, es existiert eine lokal integrierbare Funktion f, sodass für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt, dass

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Sei $\widetilde{\Omega} = \Omega \setminus \{a\}$. Wenn $\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega}) \subset \mathcal{D}(\Omega)$, dann ist $\varphi(a) = 0$ und somit $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega})$. Eine Anwendung von Satz 3.1 liefert, dass $f = 0$ fast überall auf $\widetilde{\Omega}$ ist und daher $f = 0$ fast überall auf Ω. Damit ist nun $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir wählen nun φ derart, dass $\varphi(a) \neq 0$, und erhalten einen Widerspruch. Damit ist die Einbettung $f \mapsto T_f$ nicht surjektiv. □

4. Ableitung einer Distribution

Die zentrale Idee der Rechenregeln für Distributionen ist, dass wir zunächst reguläre Distributionen betrachten. Dort ermöglicht uns die Integraldarstellung einen Rückschluss auf die Rechenregel. Schließlich **definieren** wir diese Rechenregel für alle Distributionen (auch den singulären, die keine Integraldarstellung besitzen).
Sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion. Nachdem der Träger von $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ kompakt ist, gibt es ein $R > 0$, sodass $\operatorname{supp}(\varphi) \subset]-R, R[$. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle T_{f'}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(R)\underbrace{\varphi(R)}_{=0} - f(-R)\underbrace{\varphi(-R)}_{=0} - \int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(t)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(t)\,\mathrm{d}x = -\langle T_f, \varphi' \rangle\,.\end{aligned}$$

Nun verallgemeinern wir das für alle Distributionen, indem wir dann die ganz linke Seite per Definition gleich der ganz rechten definieren.

Definition A.8

Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Distribution. Dann ist die Ableitung T' definiert als

$$\langle T', \varphi \rangle := (-1)\langle T, \varphi' \rangle\,.$$

Sei T_f eine Distribution, assoziiert zur Funktion $f \in \mathcal{C}^1$. Dann ist die Ableitung T_f' gleich der assoziierten Distribution zu f' (fast überall). Genauer gesagt, gilt für $\varphi \in \mathcal{D}$ mittels partieller

Integration, dass

$$\begin{aligned}\left\langle T_f', \varphi \right\rangle &= -\left\langle T_f, \varphi' \right\rangle = -\int_\Omega f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left\langle T_{f'}, \varphi \right\rangle .\end{aligned}$$

Damit sieht man, dass die Definition der Ableitung einer Distribution eine Verallgemeinerung der Ableitung für Funktionen darstellt. Vor allem haben wir die folgende Eigenschaft.

Proposition A.9

Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Distribution. Dann ist auch T' eine Distribution.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Resultat ist, dass, im Unterschied zu den gewöhnlichen Funktionen, jede Distribution unendlich oft abgeleitet werden kann. Also ist jede Distribution in diesem Sinne glatt.
Berechnen wir einige Beispiele.

Beispiel A.5. Betrachten wir die Ableitung der Heaviside-Funktion (vergleiche mit Beispiel A.3). Wir haben

$$\begin{aligned}(\forall \varphi \in \mathcal{D}) \quad \langle \Theta', \varphi \rangle &= -\langle \Theta, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\left[\varphi(t)\right]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Somit ist die Ableitung der regulären Distribution Θ die Dirac-Distribution und wir können schreiben:

$$\Theta' = \delta_0$$

innerhalb von $\mathcal{D}'$.

Beispiel A.6 (Ableitungen der Dirac-Distribution). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \Omega$ erhalten wir:

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}) \quad \langle \delta_a^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta_a, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \varphi^{(K)}(a).$$

ANHANG B

Fourier-Analysis

In den ersten beiden Abschnitten beschäftigen wir uns mit periodischen Funktionen. Zur Erinnerung, eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-periodisch mit $T > 0$, wenn $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zu einer gegebenen Periodendauer $T > 0$, bezeichnen wir mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{B.1}$$

die zugehörige Kreisfrequenz.
Die letzten zwei Abschnitte beschäftigen sich mit der Fourier-Transformation. Dabei handelt es sich um eine Verallgemeinerung auf nicht periodische Funktionen.

1. Trigonometrische Polynome

Zunächst wollen wir uns endlichen Approximationen – den trigonometrischen Polynomen – widmen.

Definition B.1: Trigonometrisches Polynom

Sei $N \in \mathbb{N}$. Eine T-periodische Funktion f der Form

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t}$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$ für $-N \leq k \leq N$ wird ***trigonometrisches Polynom*** genannt. Die c_k heißen die ***Koeffizienten*** und N ist der ***Grad*** von f (vorausgesetzt $|c_{-N}| + |c_N| > 0$).

Bemerkung. Ein trigonomisches Polynom kann mittels Substitution $z = e^{i\omega t}$ aus der rationalen Funktion

$$F(z) = \frac{c_{-N} + c_{-N+1}z + \cdots + c_N z^{2N}}{z^N} = c_{-N}z^{-N} + c_{-N+1}z^{-N+1} \cdots c_N z^N \tag{B.2}$$

gewonnen werden.

Als Beispiel wollen wir eine Approximation der Dirac'schen δ-Distribution mittels trigonometrischen Polynomen geben.

Beispiel B.1. Sei $T = 2\pi$, dann ist $\omega = 1$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}.$$

Um uns die Schreibarbeit zu erleichtern setzen wir

$$F_N(z) := \frac{1 + z + \cdots + z^{2N}}{z^N}.$$

Dann gilt offensichtlich $D_N(t) = F_N\left(e^{it}\right)$. Der Zähler in der Funktion $F_N(z)$ ist eine geometrische Reihe und wir erhalten

$$F_N(z) = \frac{1}{z^N}\frac{z^{2N+1}-1}{z-1} = \frac{z^{N+1}-z^{-N}}{z-1} = \frac{z^{N+\frac{1}{2}}-z^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}.$$

Erinnern wir uns an folgende Konsequenz der EULER'schen Formel ($e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$):

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Mit der Substitution $z = e^{it}$ folgt für den Zähler von $F_N(z)$:

$$z^{N+\frac{1}{2}} - z^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)} = e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)t} = 2i\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right).$$

Analog gilt für den Nenner:

$$z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}} = 2i\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Es folgt somit

$$D_N(t) = F_N\left(e^{it}\right) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = \begin{cases} 2N+1 & \text{falls } t = 2n\pi, \\ \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die erzeugenden Funktionen gelten Orthognalitätsrelationen.

Lemma B.2: Orthognalitätsrelation

Für k und n aus $\mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t}\cdot\overline{e^{in\omega t}}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = n, \\ 0 & \text{wenn } k \neq n. \end{cases}$$

BEWEIS. Seien k und n aus $\mathbb{Z}$. Wir unterscheiden zwei Fälle $k = n$ und $k \neq n$.

- $k = n$: Wir haben
$$\int_0^T e^{ik\omega t}e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \mathrm{d}t = T.$$
- $k \neq n$: In diesem Fall erhalten wir
$$\int_0^T e^{i(k-n)\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i(k-n)\omega}\left(e^{i(k-n)2\pi}-1\right) = 0.$$ □

Satz B.3

Sei f ein trigonometrisches Polynom vom Grad N. Dann gilt:

(1) **Koeffizientenvergleich:** $f(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $c_k = 0$ für $-N \leq k \leq N$.

(2) **Formeln von Euler-Fourier:** Für $-N \leq k \leq N$ ist
$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t\,.$$

BEWEIS. Nehmen wir an, $c_k \neq 0$ für ein $-N \leq k \leq N$. Die Abbildung $t \mapsto e^{i\omega t}$ bildet das Intervall $[0, T[$ bijektiv auf den Einheitskreis $|z| = 1$ in $\mathcal{C}$ ab. Damit entsprechen die Nullstellen von f eineindeutig den Nullstellen des Zählerpolynoms von $F(z)$ in (B.2) auf dem Einheitskreis $|z| = 1$. Nachdem dieses Polynom den Grad $2N$ hat, hat das trigonometrische Polynom maximal $2N$ Nullstellen, weil $c_k \neq 0$. □

2. Fourier-Reihe

2.1. Euler-Fourier-Formeln. Bevor wir die Fourier-Koeffizienten bestimmen benötigen wir eine Anforderung an die Funktion.

Definition B.4

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf diesem Intervall. Dann heißt f stückweise stetig bzw. stückweise stetig differenzierbar, wenn f bis auf endlich viele Stellen in I stetig bzw. stetig differenzierbar und für alle Ausnahmestellen der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert von f bzw. von f und f' in $\mathbb{R}$ existiert.

Nun können wir die Euler-Fourier-Formeln für die Koeffizienten aufschreiben.

Definition B.5: Euler-Fourier-Formeln

Sei $T > 0$ eine Periodenlänge, $\omega = 2\pi/T$ die zugehörige Kreisfrequenz und $f\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion. Dann

- sind die Fourier-Koeffizienten von f :

$$c_k := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

beziehungsweise

$$a_n := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad b_n := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{N}_0);$$

- ist die Fourier-Reihe von f mit c_k, a_n, b_n wie oben:

$$S_f(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right).$$

Nachdem wir (noch) nicht wissen, ob die Reihe $S_f(t)$ konvergiert, schreiben wir

$$f \sim S_f.$$

2.2. Rechenregeln. Im folgenden seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei T-periodische reelwertige Funktionen, die stückweise stetig auf $[0, T]$ sind. Zusätzlich schreiben wir

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\omega t}.$$

Lemma B.6: Linearität

Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist

$$\alpha f + \beta g \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha c_k + \beta d_k) e^{ik\omega t}.$$

BEWEIS. Das folgt aus der Linearität der Integrale in den Euler-Fourier-Formeln. □

Lemma B.7: Zeitumkehr

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{ik\omega t}.$$

BEWEIS. Mit einer Variablensubstitution erhalten wir

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(-t)e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(t)e^{ik\omega t}\,\mathrm{d}t = c_{-k}.$$ □

Lemma B.8: Streckung

Für $\lambda > 0$ erhalten wir

$$f(\lambda t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik(\lambda\omega)t}.$$

BEWEIS. Wir substituieren $\tau = \lambda t$ mit $0 \le \tau \le T/\lambda$. □

Lemma B.9: Verschiebung im Zeitbereich

Für $a \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$f(t+a) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{ik\omega a} c_k\right) e^{ik\omega t}.$$

BEWEIS. Diese Mal substituieren wir $\tau = t + a$. □

Lemma B.10: Verschiebung im Frequenzbereich

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$e^{in\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-n} e^{ik\omega t}.$$

BEWEIS. Wir setzen $e^{in\omega t} f(t)$ anstelle von $f(t)$ in die Euler-Fourier-Formeln ein. □

Lemma B.11: Periodische Faltung

Es gilt

$$h(t) := \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{ik\omega t}.$$

BEWEIS. Wir setzen in die Euler-Fourier-Formeln ein und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T h(t)e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\, e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T f(\tau)e^{-ik\omega\tau}g(t-\tau)e^{-ik\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

Sowohl $t\mapsto g(t)$ als auch $t\mapsto e^{-ik\omega t}$ sind T-periodisch. Mit der Substitution $(\tau,t)=(\tau,\tau+y)$ erhalten wir

$$\frac{1}{T}\int_0^T h(t)e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)e^{-ik\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(y)e^{-ik\omega y}\,\mathrm{d}y\right) = c_k d_k. \qquad \square$$

2.3. Vollständigkeit und Eindeutigkeit.

Satz B.12: Vollständigkeit

Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stückweise stetige, T-periodische Funktion. Wenn

(1) für alle $t\in\mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t-)+f(t+)\right) \quad \text{und}$$

(2) für alle $k\in\mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{ik\omega t}\,\mathrm{d}t = 0,$$

dann ist $f(t)=0$ auf ganz $\mathbb{R}$.

BEWEIS. Für jedes T-periodische trigonometrische Polynom P gilt dank (2)

$$\int_0^T f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Nehmen wir an, es gibt ein $a\in\mathbb{R}$, sodass $f(a)>0$ ist. Nachdem f stetig ist, gibt es eine ganze Umgebung von a auf der f positiv ist, d.h. es existieren $\varepsilon,\delta>0$, sodass $|f(t)|>\varepsilon>0$ auf einem Intervall $|t-a|<\delta$.
Betrachten wir die Impulsfunktion

$$I_\delta(t) = \begin{cases}\frac{1}{2\delta} & |t-a|<\delta,\\ 0 & |t-a|\geq\delta.\end{cases}$$

Dann ist

$$\int_0^T f(t)I_\delta(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

Aber wir können I_δ beliebig genau mit dem trigonometrischen Polynom

$$P(t) = \frac{1}{2N+1} D_N^2(t-a)$$

mit D_N aus Beispiel B.1 approximieren. □

Korollar B.13: Eindeutigkeitssatz

Seien f und g zwei stückweise stetige Funktionen auf $[0,T]$. Wenn beide die Eigenschaft (1) aus Satz B.12 erfüllen und beide dieselben Fourierkoeffizienten besitzen, dann sind sie identisch.

BEWEIS. Wir wenden Satz B.12 auf die Funktion $t \mapsto f(t) - g(t)$ an. □

2.4. Beispiele.

BEISPIEL B.2. Die Fouriertransformierten einer Dreiecksfunktion:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{2t}{T} & \text{für } -\frac{T}{2} \le t \le 0, \\ 1 - \frac{2t}{T} & \text{für } 0 < t \le \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Wir erinnern uns $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ und $a_0 = \frac{1}{2}$ (Mittelwert). Wir wissen die Funktion ist gerade, d.h. $f(t) = f(-t)$. Damit fallen bei den Fourierkoeffizienten die Terme, die den Sinus enthalten, weg. Anders gesagt haben wir $b_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Für die Fourierkoeffizienten a_k, $k \in \mathbb{N}$ gilt somit:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}\left(1+\frac{2t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt + \int_0^{T/2}\left(1-\frac{2t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt\right] \\ &= \underbrace{\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(1+\frac{2t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt}_{=0} \\ &\quad + \frac{4}{T^2}\int_{-T/2}^{0} t\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt - \frac{4}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt \\ &= -\frac{8}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden wir, dass

$$\int x\cos(tx)\,dx = \frac{x}{t}\sin(tx) + \frac{1}{t^2}\cos(tx)$$

und erhalten schließlich

$$a_k = \frac{2(1-\cos(\pi k))}{\pi^2 k^2}, \quad k \ge 0.$$

Der Ausdruck für a_k verdient noch einige Bemerkungen:

- Für alle geraden k verschwindet a_k.
- Für alle ungeraden k haben wir $a_k = 4/(\pi^2 k^2)$.
- Für $k = 0$ sollten wir lieber den Mittelwert a_0 nehmen und nicht $k = 0$ in die Formel für a_k einsetzten.

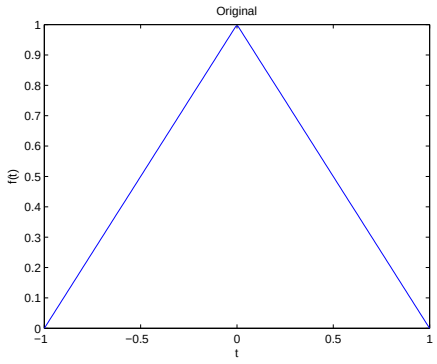
Wir können also weiter vereinfachen und erhalten

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für} \quad k = 0, \\ \frac{4}{\pi^2 k^2} & \text{für ungerade} \quad k, \\ 0 & \text{für gerade} \quad k \neq 0. \end{cases}$$

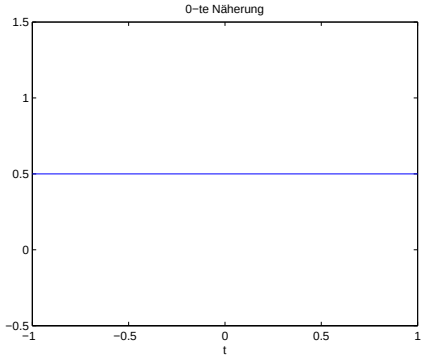
Die Reihenglieder nehmen zwar mit steigenden k rasch ab, aber prinzipiell haben wir eine unendliche Reihe. Die liegt an den *spitzen* Dach bei $t = 0$ und an den Knick (periodische Fortsetzung) bei $t = \pm T/2$ unserer Funktion $f(t)$. Um diese Knicke zu beschreiben brauchen wir unendlich viele Fourierkoeffizienten. Andererseits kann man mittels den ersten Fourierkoeffizienten die Figur schon recht gut annähern, was die folgende Bildreihe illustrieren soll:
Mit $\omega = 2\pi/T$ erhalten wir

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t + \frac{1}{25}\cos 5\omega t + \cdots\right),$$

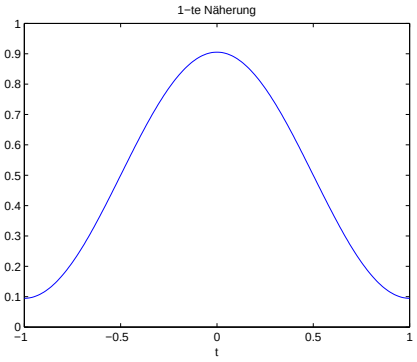
und



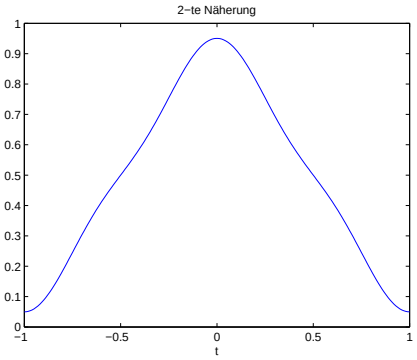
$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{2t}{T} & \text{für} \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq 0, \\ 1 - \frac{2t}{T} & \text{für } 0 < t \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$



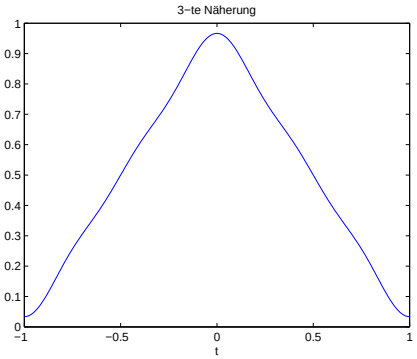
$$t \quad \mapsto \quad \frac{1}{2}$$



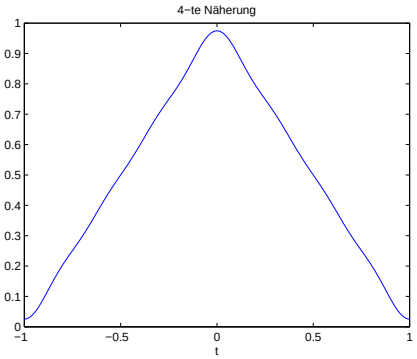
$$t \;\mapsto\; \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t);$$



$$t \;\mapsto\; \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\Big(\cos(\pi t) + \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi t)\Big);$$



$$t \;\mapsto\; \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\Big(\cos(\pi t) + \frac{1}{9}\cos(3\pi t) + \frac{1}{25}\cos(3\pi t)\Big);$$



$$t \;\mapsto\; \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\Big(\cos(\pi t) + \frac{1}{9}\cos(3\pi t) + \frac{1}{25}\cos(5\pi t) + \frac{1}{49}\cos(7\pi t)\Big);$$

Die Fourierreihenentwicklung kann man auch beim Nten Glied abbrechen. Im allgemeinen gilt, je höher N desto besser approximiert

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=1}^{N} b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{N} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

die ursprüngliche Funktion f. Dabei gilt, je glatter die Funktion ist, desto besser wird die Funktion approximiert. Diese Entwicklung wollen wir Anhand folgender Bildreihen erklären.

Beispiel B.3. Sei dazu $f(t) = t^2 - 0.5^2$. Im ersten Bild sehen Sie die Funktion und die Näherung für $N = 1, 2, 3, 5, 10$ und 20.

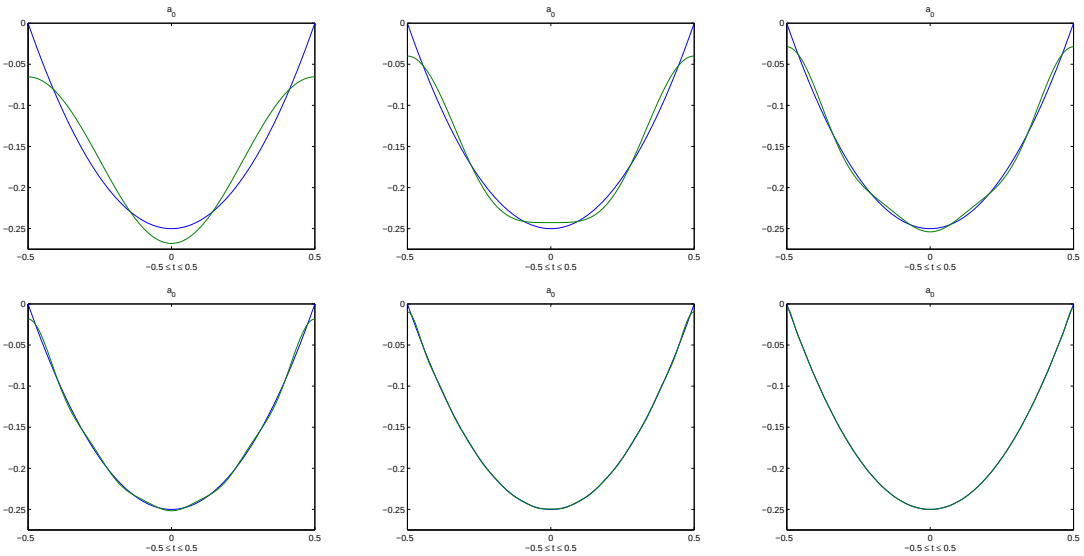


Abbildung B.1. Approximation der Funktion $t \mapsto t^2 - 0.5^2$ mittels der Fourierreihe

Beispiel B.4. Im der nächsten Bilderreihe sehen Sie die Approximation mittels der Fourierreihe der Funktion

$$\begin{aligned} f : [-1,\, 1\,] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -1/7 \le x \le 1/7, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe B.1. *Berechnen Sie die Fouriertransformierte für folgende Funktion ($T = 4$):*

$$f(t) = \begin{cases} 1 + t, & \textit{falls } -1 \le t \le 0, \\ 1 - t, & \textit{falls } 0 < t \le 1, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe B.2. *Berechnen Sie die Fouriertransformierte für folgende Funktion ($T = 4$):*

$$f(t) = t^2 - 1, \quad t \in [-2, 2].$$

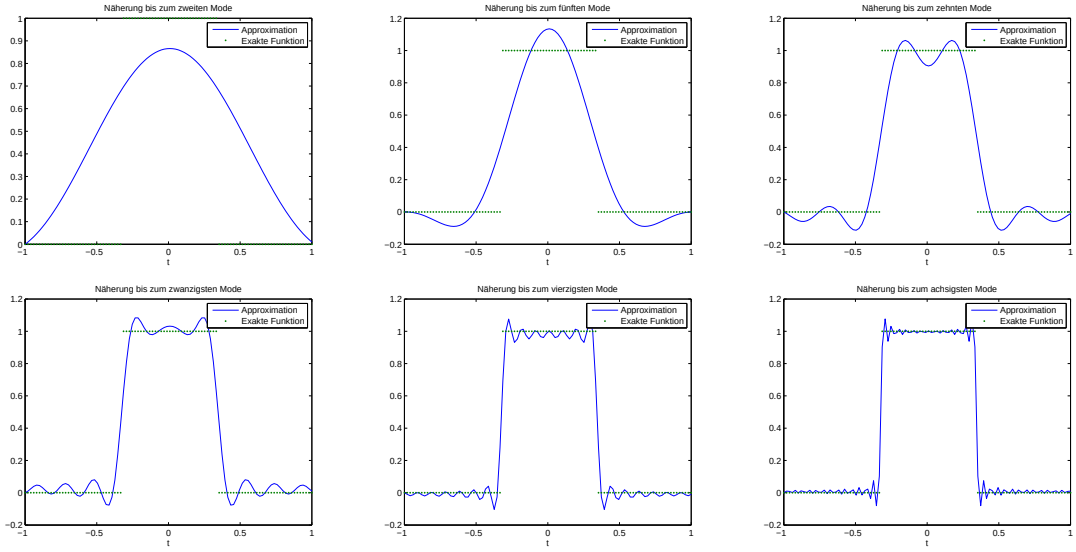


ABBILDUNG B.2. Approximation der Funktion f mittels der Fourierreihe

3. Fourier-Transformation

Bereits FOURIER hat durch den Grenzübergang $T \to \infty$ seine Formeln auf nicht-periodische Funktionen ausgeweitet. In diesem Abschnitt wollen wir es ihm gleich tun.

3.1. Herleitung. Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}$ und $T > 0$. Wir betrachten f zunächst nur auf $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ und setzen sie T-periodisch fort. Dann bekommen wir von den Euler-Fourier-Formeln die Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-k\frac{2\pi}{T}t} \, \mathrm{d}t \,.$$

Wir schreiben $\Delta\omega = 2\pi/T$ und $\omega_k = k\Delta\omega$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann sind die $(\omega_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ äquidistante Punkte auf der reellen Gerade mit Abstand $\Delta\omega$.
Eingesetzt in die Fourier-Reihe erhalten wir (sofern $f(x) = S_f(x)$)

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{i\omega_k x} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\omega_k t} \, \mathrm{d}t \right) \Delta\omega \quad \left(-\frac{T}{2} \le x < \frac{T}{2} \right).$$

Die Summe über k können wir als Riemann-Summe interpretieren. Dann folgt bei einem Grenzüberganz $T \to \infty$, dass auch $\Delta\omega \to 0$ und wir erhalten

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\omega \tag{B.3}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Diese Beziehung heißt *Fourier-Integral-Formel* und wird unter allgemeinen Voraussetzungen in Abschnitt 3.3 bewiesen werden.
Aus ihr können wir die Darstellung von f als *Fourier-Integral*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} \, \mathrm{d}\omega \tag{B.4}$$

mit der *Spektralfunktion* (von f(t))

$$c(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{B.5}$$

ableiten. Die Fourierkoeffizienten der Fourier-Reihe einer periodischen Funktion, geben die in der Funktionen enthaltenen harmonischen Schwingungen an. Insofern können wir die Spektralfunktion als eine „kontinuierliche“ Variante interpretieren. Dabei stellt $c(\omega)$ eine „Dichtefunktion“ der in f enthaltenen Teilschwingungen dar. Daher nennt man (B.4) die spektrale Zerlegung von f. Wir schließen daraus, dass eine periodische Funktion ein diskretes Spektrum, während eine aperiodische Funktion ein kontinuierliches Spektrum besitzt.
Wenn Gleichung (B.3) erfüllt ist, bilden die Gleichungen (B.4) und (B.5) zueinander inverse Integraltransformationen, welche wir im folgenden benennen wollen.

Definition B.14: Fourier-Transformation

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Fourier-transformierbar, wenn der Cauchy-Hauptwert

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{B.6}$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall nennt man $F(\omega)$ die Fourier-Transformierte bzw. Spektralfunktion von f.
Die inverse Fourier-Transformation von $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist der Cauchy-Hauptwert

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega\,, \tag{B.7}$$

falls er existiert.

Bemerkung. Man sagt, dass $f(t)$ im Original- oder Zeitbereich liegt, während die Spektralfunktion $F(\omega)$ im Bild- oder Frequenzbereich ist. Das Paar $(f(t), F(\omega))$ ist eine F-Korrespondenz und man schreibt kurz

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!- \quad F(\omega).$$

Bevor wir uns auf die Rechenregeln stürzen, wollen wir noch kurz zwei Beispiele geben.

Beispiel B.5. Der Rechteckimpuls

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & |t| \le 1, \\ 0 & |t| > 1, \end{cases}$$

hat die Spektralfunktion

$$\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} = \begin{cases} 2\frac{\sin(\omega)}{\omega} & \omega \neq 0, \\ 2 & \omega = 0. \end{cases}$$

Es besteht also die F-Korrespondenz

$$\Pi(t) \quad \circ\!\!-\!\!- \quad 2\mathrm{sinc}(\omega) \quad \text{mit} \quad \mathrm{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Beispiel B.6. Sei $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ Die beidseitige Exponentialfunktion

$$f(t) = e^{-|t|/\tau}.$$

hat die Spektralfunktion

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau} e^{-i\omega t}\,dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-t/\tau}\cos(\omega t)\,dt = \frac{2\tau}{1+\omega^2\tau^2}.$$

Es besteht also die F-Korrespondenz

$$e^{-|t|/\tau} \quad \circ\!\!-\!\!- \quad \frac{2\tau}{1+\omega^2\tau^2}.$$

3.2. Rechenregeln. Analog zu den Fourierreihen gelten einige Regeln. Im folgenden sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $F = \mathcal{F}\{f\}$ und $G = \mathcal{F}\{g\}$ ihre Fourier-Transformierten.

(a) **Linearität:** Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \quad \circ\!\!-\!\!- \quad \alpha F(\omega) + \beta G(\omega).$$

(b) **Streckung/Ähnlichkeit:** Sei $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(ct) \quad \circ\!\!-\!\!- \quad \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

(c) **Verschiebung im Zeitbereich:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t-a) \quad \circ\!\!-\!\!- \quad e^{-i\omega a} F(\omega).$$

(d) **Verschiebung im Frequenzbereich:** Für $\Omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{i\Omega t} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!- \quad F(\omega - \Omega).$$

(e) **Differentiation im Zeitbereich:**

$$f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!- \quad i\omega F(\omega).$$

(f) **Differentiation im Frequenzbereich:**

$$t f(t) \quad \circ\!\!-\!\!- \quad iF'(\omega).$$

(g) **Faltung:** Es gilt die Produktregel

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \circ\!\!-\!\!- \quad F(\omega) \cdot G(\omega).$$

Wir können die Fourier-Transformierte auch dadurch berechnen, dass wir Real- und Imaginärteil getrennt betrachten. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel.

Beispiel B.7. Sei

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0, \\ e^{-t}, & \text{falls } t > 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte.

3.3. Umkehrformel. Um die Voraussetzungen für die Umkehrbarkeit der Fourier-Transformation zu geben, müssen wir zunächst definieren, was absolut integrierbar bedeutet.

Definition B.15

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt ***absolut integrierbar***, wenn sie auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig ist und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Wir bezeichnen mit $L^1(\Omega)$ die Menge aller absolut integrierbaren Funktionen auf Ω.

Nun können wir die Parseval-Plancherel-Gleichung aufstellen.

Satz B.16: Parseval-Plancherel-Gleichung

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar. Dann existiert $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$ auf ganz $\mathbb{R}$, $F(\omega)$ ist beschränkt und stetig auf $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Satz B.17: Fourier-Integraltheorem

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine absolut integrierbare Funktion. Wenn f auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig differenzierbar ist, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}\left[f(x-) + f(x+)\right] = \frac{1}{2\pi}\lim_{\Omega\to\infty}\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\omega\,.$$

Satz B.18: Umkehr- und Eindeutigkeitssatz

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f

(i) absolut integrierbar,
(ii) auf jedem endlichen Intervall stückweise differenzierbar und
(iii) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwerteigenschaft $f(t) = \frac{1}{2}[f(t-) + f(t+)]$ erfüllt,

dann ist mit f auch $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ Fourier-transformierbar und es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2\pi}F(-\omega)\right\} = f(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Das heißt, die F-Korrespondenz $f \circ\!\!-\!\!- F$ ist umkehrbar eindeutig.

3.4. Fouriertransformation für Distributionen. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fourier-transformierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left\langle T_{\mathcal{F}\{f\}}, \varphi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left\{f(t)\right\}(\omega)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\varphi(\omega)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{-it\omega}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}\left\{\varphi(\omega)\right\}(t)\,\mathrm{d}t = \left\langle T_f, \mathcal{F}\left\{\varphi\right\}\right\rangle.\end{aligned}$$

Also ist die Fouriertransformation einer regulären Distribution, die Distribution angewendet auf die fouriertransformierten Testfunktionen. Es haben also die Transformationen getauscht. Dies ermöglicht uns die folgende Definition.

Definition B.19

Sei $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Distribution. Dann ist

$$\left\langle \mathcal{F}\left\{T\right\}, \varphi \right\rangle := \left\langle T, \mathcal{F}\left\{\varphi\right\}\right\rangle$$

Beispiel B.8 (Dirac δ-Distribution). Sei δ die Dirac-Distribution $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$. Dann folgt

$$\left\langle \mathcal{F}\left\{\delta\right\}, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta, \mathcal{F}\left\{\varphi\right\}\right\rangle = \mathcal{F}\left\{\varphi\right\}(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left\langle 1, \varphi\right\rangle.$$

In den Distributionen gilt also $\mathcal{F}\left\{\delta\right\} = 1$.

Index

ω_D, 17
ρ, 13
φ, 13
$x_h(t)$, 11
$x_p(t)$, 11

Abklingkonstante, 9
Amplitude, 13
Anfangsbedingungen, 12

charakteristischen Exponenten, 141

Dauerlösung, 27
Distribution
  regulär, 147
  singulär, 148
distribution
  dérivée de, 149
Durchlässigkeit, 42
Dämpfung
  unterkritische, 17
  kritische, 20
  verschwundene, 35
  überkritische, 22
Dämpfungs-
  glied, 5
  grad, 9
  kraft, 5
Dämpfungsgrad, 17
Dämpfungskonstante, 5

Eigenfrequenzen, 79
Eigenschwingungsform, 79
Einheitssprungfunktion, 53
Elastizitätsmodul, 15
Energie
  -methode, 100
Erregerkraft
  harmonische, 27
  impulsartige, 62
  periodische, 53
  transiente, 53
Ersatzkräfte
  viskoeleastische, 38

Faltungssatz, 73
Feder, 5
  schwache, 104
Federkonstante, 5
Federkraft, 5
Fourier-Integral, 160
Fourier-Integral-Formel, 160
Fouriertransformation, 73
Frequenz, 10
  aufgeprägte, 34
Fundamentallösung, 58

Heavisidefunktion, 53
Hertz, 10
Hillsche Differentialgleichung, 141

Impulsantwort, 56
Integral
  elliptisches, 103

Kontinuitätsgleichung, 115
Kraft
  aufgeprägte, 6
Kreisfrequenz
  kritische, 9
kritische Punkte, 105

logarithmisches Dekrement, 19
Lösung
  allgemeine, 8
  Dauer-, 27

particuläre, 8

Masse, 5
Mathieusche Differentialgleichung, 141

Newtonsches Gesetz, 6

Orbit, 98

Periode, 10
Phasen
-verschiebung, 13
-winkel, 13
Phasenraum
-diagramm, 97
Phasenraumdiagramm, 101

Rechteckimpuls, 161
Reibschwinger, 109
Resonanz, 35, 37
-schärfe, 38
Resonanzkatastrophe, 30

Schwebung, 15
Schwingung
freie, 6
gedämpfte erzwungene, 31
gedämpfte freie, 17, 18
selbsterregte, 111
ungedämpfte erzwungene, 28
ungedämpfte freie, 11
Schwingungsdauer, 10, 102
Sekundenpendel, 103
Sprungantwort, 54
System
autonomes, 97
konservatives, 101
nichtlineares, 97
schwingfähiges, 20, 22

Testfunktion, 145
Trajektorie, 98
Trigonometrisches Polynom, 151
Trägheitskraft, 5

Vorintegral, 98

Zeigerdiagramm, 13
Zustand, 98

Übertragungsfunktion, 70

Literaturverzeichnis

[1] Eberhard Brommundt and Delf Sachau, *Schwingungslehre mit Maschinendynamik*, Springer Vieweg Wiesbaden, 2022.

[2] Jürgen Dankert and Helga Dankert, *Technische Mechanik*, Springer Vieweg Wiesbaden, 2023.

[3] Franz Holzweißig and Hans Dresig, *Lehrbuch der Maschinendynamik*, Springer Vienna, 1982.

[4] Kurt Magnus, Karl Popp, and Walter Sextro, *Schwingungen*, Springer Vieweg Wiesbaden, 2021.